シュヴァルツ

解析学 1

集合・位相

齋藤正彦 訳

東京図書株式会社

LAURENT SCHWARTZ

COURS D'ANALYSE

I

HERMANN

Paris 1967

序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

訳　者　序

本書は，Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である．これは，シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた．

原書は全二巻の仮綴本であるが，訳書は全7巻に分けた．訳書の構成はつぎのとおりである．

第1巻	集合・位相	Ch. 1	集　合
		Ch. 2	位　相
第2巻	微分法	Ch. 3	微分法
第3巻	積分法 上	Ch. 4	積分法
第4巻	積分法 下	Ch. 4	積分法（つづき）
第5巻	外微分法	Ch. 6	外微分法
第6巻	複素関数	Ch. 7	複素関数
第7巻	微分方程式	Ch. 5	微分方程式
	ヒルベルト空間	Ch. 22	ヒルベルト空間
	フーリエ級数	App.	フーリエ級数

読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す.
2. 記号〚——〛は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«**A**〚**A′**〛ならば **B**〚**B′**〛である» は，«**A** ならば **B** であり，**A′** ならば **B′** である» を意味する.
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた.

目　　次

第1章　集　合　論

§1.　集合とその基本的な演算

ものの集まりを**集合**と言う.

例　あるクラスの生徒全部の集合
　平面上の点全部の集合
　三次元空間における非退化二次曲面全部の集合
　0 以上の整数全部の集合 $\mathbf{N}$
　整数全部の集合 $\mathbf{Z}$
　有理数全部の集合 $\mathbf{Q}$
　実数全部の集合 $\mathbf{R}$
　複素数全部の集合 $\mathbf{C}$

簡単のため，《何々全部の集合》と言うかわりに《何々の全体》とも言うことにする.

部分集合

記号 $x \in \mathrm{E}$ は《x は集合 E の元である》を意味する*). 集合 A がもう一つの集合 E の元だけから成るとき，A は E の**部分集合**であると言う. 楕円面全部の集合は二次曲面全部の集合の部分集合である.

集合 E の部分集合には E 自身もあり，空集合 $\varnothing$ もある. また一点 a から成る部分集合 $\{a\}$ もある. 三つの元 a, b, c から成る集合を $\{a, b, c\}$ と書く. E の元 a と E の部分集合 $\{a\}$ とを混同してはならない. ある性質 P を

*) 集合はまた空間と呼ばれることも多く，そのときにはその元は普通点と呼ばれる.

持つ元全部の集合を普通 $\{x\,;\,x$ は性質 P を持つ$\}$ と書く．たとえば，$\{x\,;\,x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0\}$ は 0 以上の実数全部の集合を意味し，$\{\mathrm{Arc}\tan x\,;\,x \in \mathbf{R},\ e \leqslant x \leqslant 2e\}$ は，x が e と $2e$ との間（両端も含めて）の値すべてを取るときの $\mathrm{Arc}\tan x$ なる数全部の集合を表わす．

集合 E の部分集合全部の集合を $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ で表わす．これは E から作られる新しい集合である．こうしてつぎつぎに $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))$ 等々を考えることができる．

E が n 個の元から成るとき，$\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ は 2^n 個の元から成る*)．

包含関係．補集合

X，Y を E の部分集合とする．X の元がすべて Y の元であるとき，X は Y に**含まれる**または Y は X を**含む**と言い，$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ または $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}$ と書く．すると，$\varnothing \subset \mathrm{X} \subset \mathrm{E}$，$\varnothing \subset \varnothing$，$\mathrm{E} \subset \mathrm{E}$ が成立つ．また，$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$，$\mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$ ならば $\mathrm{X} \subset \mathrm{Z}$ である．

A が E の部分集合であるとき，A に属さない E の元全部の集合を A の E における**補集合**と言い，$\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ と書く．混乱のおそれのないときには，$\complement \mathrm{A}$ とも書く．このとき $\complement\complement \mathrm{A} = \mathrm{A}$ が成立つ．また，$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ならば $\complement \mathrm{A} \supset \complement \mathrm{B}$ となる．A，B が E の部分集合で $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ のとき，A の元で B に属さないもの全部の集合を $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ と書くことがある．

合併集合．共通部分

集合 E の部分集合の集まりの**合併集合**とは，E の元で，それらの部分集合の少なくとも一つに属するようなもの全部の集合である．たとえば三つの部分集合 A，B，C の場合，その合併集合を $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ と書く．

ある添字集合 I によって添字づけられた部分集合 A_i の族の場合には，その

---

*) n 個の元から成る集合の部分集合のうち，p 個の元から成るものの個数を ${}_n\mathrm{C}_p$ または $\binom{n}{p}$ と書く．そこで，E のあらゆる部分集合（$\varnothing$ や E も忘れずに）を数えて

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

が得られる．

つぎのように考えてもよい．$\mathrm{E}_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ とすると，$\mathfrak{P}(\mathrm{E}_n)$ は $n \geqslant 1$ ならば，二つの共通元のない部分集合，すなわち n を含む部分集合全部の集合および n を含まない部分集合全部の集合とに分れる．そして，そのそれぞれの元の個数は $\mathfrak{P}(\mathrm{E}_{n-1})$ の元の個数である．だから，$\mathfrak{P}(\mathrm{E}_n)$ の元の個数を A_n とすれば，$\mathrm{A}_n = 2\mathrm{A}_{n-1}$ が成立つ．$\mathrm{A}_0 = 1$（E_0 は空集合，その部分集合は $\varnothing$ のみ）であるから $\mathrm{A}_n = 2^n$ となる．

合併集合を $\bigcup_{i\in I} A_i$ と書く.

集合 E の部分集合の集まりの**共通部分**とは, E の元で, それらの部分集合のどれにも属するようなもの全部の集合である. 前と同様, $A\cap B\cap C$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ などの記号を用いる.

二つの部分集合の共通部分が空集合であるとき, この二つの部分集合は共通元がないと言う.

部分集合の族の共通部分の補集合は, 各部分集合の補集合の合併集合である. 部分集合の族の合併集合の補集合は, 各部分集合の補集合の共通部分である. すなわち,

$$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B,\qquad \complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B. \tag{1.1}$$

したがって, E の各部分集合にその補集合を対応させる操作により, $\subset$ は $\supset$ に, $\supset$ は $\subset$ に, $\cup$ は $\cap$ に, $\cap$ は $\cup$ に移る.

積　集　合

二つの集合 E, F に対し, E の元 x と F の元 y との順序のある組 (x, y) 全部の集合を E と F との**積集合**と言い, $E\times F$ と書く. $x\neq y$ ならば (x, y) と (y, x) とは違うものであることに注意せよ. とくに E と F とが同じ集合のときには混同しないようにしなければならない.

同様に, もっと多くの集合の積や集合の族の積を定義することができる. このとき, $(E\times F)\times G$, $E\times(F\times G)$, $E\times F\times G$ はたがいに同一視することができる. これが集合の乗法の結合性である.

$E\times E$, $E\times E\times E$ 等はそれぞれ E^2, E^3 等と記す.

したがって, 実数全部の集合 $\mathbf{R}$ の n 個の積は $\mathbf{R}^n$ と書かれる. $\mathbf{R}^n$ の点は n 個の任意の実数の順序づけられた組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である.

§ 2.　写像あるいは関数

E, F を集合とする. E の各元 x に F の一つの元を対応させる対応 (規則) f を E から F への**写像**あるいは E で定義されて F に値を取る**関数**と言う. x に対応する F の元を $f(x)$ と書く. 記号 $E\xrightarrow{f}F$ は, f が E から F への写像であることを表わす. E, F をそれぞれこの写像の**始集合**, **終集合**と言う.

写像 f と, f によってある元 x に対応する元 $f(x)$ とを注意深く区別しなければならない. しかし, 実用の見地から言うと, この区別をつねにすることは

あまり簡単でない．たとえば《関数 $\sin x$》というのは便利だが正確ではなく，《関数 sin》と言うべきなのである．$\sin x$ はこの関数のある点 x での値ということになる．しかしこれでは不便なので，関数《$x \mapsto \sin x$》と言うか，または《$f(x)=\sin x$ によって決まる関数 f》とか言うことにすればよい．

ある集合からそれ自身への写像は**作用素**とも呼ばれる．

写像の例

1.　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ によって決まる関数 f は，実数直線 $\mathbf{R}$ から 0 を除いた集合から $\mathbf{R}$ への写像である．だから，この関数を実変数の実数値関数と言うのは正確ではない．変数は実数すべての値を取ることができないのだから．しかし，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 g を，$x \neq 0$ ならば $g(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(0)=2$ として決めることはもちろんできる．この関数 g は関数 f とは違うもので，その定義される集合自身がすでに違っている．また写像 h を，$x \neq 0$ に対しては $h(x)=\dfrac{1}{x}$，$h(0)=+\infty$ と置いて，集合 $\mathrm{E}=\mathbf{R}$ から，$\mathbf{R}$ に $+\infty$ と記す一つの元を付加えた集合 F への写像として考えることもできる．

2.　閉区間 $[a,\ b]$ で定義される実数値可積分関数全部の集合を E とすれば，積分 $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$ は E から実数直線 $\mathbf{R}$ への写像である．

3.　ユークリッド平面内の長さ有限な曲線全部の集合を E とすると，各曲線にその長さを対応させる対応は，E から半直線 $\mathbf{R}_+$（0 以上の実数全体）への写像である．

集合 E 上，$f(x)=x$ で定まる E から E への写像 f を E の**恒等写像**と言う．E が F の部分集合のとき，$f(x)=x$ によって定まる E から F への写像を E から F への**標準単射**と言う．

積集合 $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ から E への写像が，組 $(x,\ y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ に x を対応させることによって得られる．これを E への**射影**と言う．同様に F への射影も定義される．

E，F，G を集合とする．$\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ から G への写像 f は組 $(x,y)=z\in\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ に G の元 $f(z)=f((x,\ y))$ を対応させる．普通，二重括弧をはずして，これを $f(x,\ y)$ と書き，f を二変数の関数と言う．たとえば，E が実変数の，各有限区間で可積分な実数値関数全部の集合であるとき，積分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ は $\mathrm{E}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像を定める．実際，それは三変数 $\varphi\in\mathrm{E}$，$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$ の関数である．

つぎに，E から $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ への写像は $x\mapsto(f(x),\ g(x))$ の形となり，ここ

で f，g はそれぞれ E から F，G への写像である．すなわちこの関数は，二つの関数の組を考えているのと同じである．

もっと一般に，積集合 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ から積集合 $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ への写像は，n 変数の関数 m 個の組と同じものである．

E から F への写像 f で，すべての $x \in E$ に対する $f(x)$ が F の同一の元であるとき，f を**定値写像**と言う．

単射．上射．双射

E から F への写像 f による E の二つの相異なる元の像が F の相異なる元であるとき，f を**単射**と言う．ある集合の部分集合から全集合への標準単射はもちろん単射である．

F の各元が，E の少なくとも一つの元の f による像であるとき，f を**上射**と言う．

F の各元が，E のちょうど一つの元の f による像であるとき，f を**双射**と言う．ある写像が双射であるのは，それが単射かつ上射であるときである．ある集合からそれ自身への双射は，**置換**とか**変換**とかとも呼ばれる．

f を双射とし，$y \in F$ とする．$f(x) = y$ となる E の唯一つの元 x を $f^{-1}(y)$ と書く．こうして F から E への写像 f^{-1} が定まる．これを f の**逆写像**あるいは**逆双射**と言う．適切ではないが，しばしば**逆関数**とも言う．

部分集合の順像と逆像

f を E から F への写像とし，A を E の部分集合とする．$x \in A$ に対する $f(x)$ の全部から成る F の部分集合を $f(A)$ と書く．もちろん $f(\varnothing) = \varnothing$ である．$A \mapsto f(A)$ によって $\mathfrak{P}(E)$ から $\mathfrak{P}(F)$ への写像が定まる．この写像は記号 $\subset$，$\supset$，$\cup$ を保存する．すなわち

(2.1)
$$\begin{cases} A \subset B \text{ ならば } f(A) \subset f(B). \\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \end{cases}$$

しかしそれは記号 $\cap$，$\complement$ を保存しない．すなわち

(2.2)
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

が成立つだけである[*]．$f(A)$ を A の f による**順像**または**像**と言う．

つぎに B が F の部分集合であるとき，$f(x) \in B$ となる E の元 x 全部の

---

*) f を定値写像，$f(x) = b$ とする．A，B を E の共通元のない部分集合とすると，$A \cap B = \varnothing$ だからもちろん $f(A \cap B) = \varnothing$ である．一方 $f(A) \cap f(B) = \{b\}$ となる．

集合を $f^{-1}(\mathrm{B})$ と書く*). 当然 $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ である**). こうして, $\mathfrak{P}(\mathrm{F})$ から $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ への写像 $\mathrm{B}\mapsto f^{-1}(\mathrm{B})$ が得られる.

この写像は五つの記号 $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$, $\complement$ を保つ. すなわち

$$(2.3)\quad \begin{cases} \mathrm{A}\subset\mathrm{B} \text{ ならば } f^{-1}(\mathrm{A})\subset f^{-1}(\mathrm{B}) \\ f^{-1}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=f^{-1}(\mathrm{A})\cup f^{-1}(\mathrm{B}),\ f^{-1}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=f^{-1}(\mathrm{A})\cap f^{-1}(\mathrm{B}), \\ f^{-1}(\complement\mathrm{A})=\complement f^{-1}(\mathrm{A}). \end{cases}$$

したがって写像 f^{-1} の方が前の f より簡単である. E の部分集合 $f^{-1}(\mathrm{B})$ を B の f による**逆像**と言う. もちろん, f が双射であると仮定しているわけではないことに注意しよう. いつでも, $y\in\mathrm{F}$ に対して $f^{-1}(\{y\})$ は意味があるのだが, これは E の部分集合であって, E の元ではない. f が単射でなければそれは二つ以上の元を含み得るし, f が上射でなければそれは空集合であり得る**). f が双射ならばちょうど $f^{-1}(\{y\})=\{f^{-1}(y)\}$ となる. さらにこの場合には, 記号 $f^{-1}(\mathrm{B})$ の持つ二つの意味は一致する. すなわちそれは B の f による逆像でもあり, また逆双射 f^{-1} による B の順像でもある. また, この場合には順像の方も五つの記号 $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$, $\complement$ を保つ.

一般にはつぎのことが言える:

$$(2.4)\quad \begin{cases} f^{-1}(f(\mathrm{A}))\supset\mathrm{A} & (\mathrm{A}\in\mathfrak{P}(\mathrm{E})), \\ f(f^{-1}(\mathrm{B}))\subset\mathrm{B} & (\mathrm{B}\in\mathfrak{P}(\mathrm{F})). \end{cases}$$

写像の集合. 族. 列

集合 E, F に対し, E から F への写像全部の集合を問題にすることができる. E が二つの元から成るとき, 問題の集合から F の二乗 F^2 への双射が存在する. なぜなら, E から F への写像は, E の二元の像の組 $(x, y)\in\mathrm{F}^2$ によって定まるからである. E が n 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ から成るときには, 問題の集合から F^n への双射が存在する. 実際, E から F への写像は, n 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の像 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathrm{F}^n$ によって定まるからである. だから, 普通 E から F への写像全部の集合のことを F^{E} と書くのである.

当然 F^{E} の部分集合を問題にすることもできる. E, F が距離空間の場合には E から F への連続写像の全体, E, F が線型空間の場合には E から F への線

*) 冒頭の記号を使えば,

$$f^{-1}(\mathrm{B})=\{x\,;\,f(x)\in\mathrm{B}\},\quad f(\mathrm{A})=\{f(x)\,;\,x\in\mathrm{A}\}.$$

**) $\mathrm{B}\neq\emptyset$ でも $f^{-1}(\mathrm{B})=\emptyset$ となることがある. たとえば f が $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 $x\mapsto x^2$ のとき, $f^{-1}(\{-1\})=\emptyset$.

型写像の全体等々.

集合 I から E への写像のことを，**添字集合 I によって添字づけられた E の元の族** $(x_i)_{i \in I}$ とも言う．I によって添字づけられた E の元の族の全体は，I から E への写像の全体 E^I にほかならない.

とくに，0 以上の整数全部の集合 **N** によって添字づけられた E の元の族，または同じことであるが **N** から E への写像のことを，E の元の**列**と言う．E の元の列全部の集合は E^N にほかならない．実際には列はいつも **N** によって添字づけられているとは限らない．1 以上の整数 $\mathbf{N}_1$ によって添字づけられた列もあるし，また有限個の整数 1, 2, …, n によって添字づけられた**有限列**もある．だから，添字集合が **N** でないときには，《列》の意味を正確にしておくことがつねに望ましい.

合成写像

E, F, G を集合，f を E から F への写像，g を F から G への写像とする．$g \circ f(x) = g(f(x))$ によって決まる E から G への写像 $g \circ f$ を f と g との**合成写像**と言う．ここで，$g \circ f$ と，作用の働く順序とは逆に書かれることに注意せよ：

(2.5) $$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

写像の合成 $g \circ f$ において，右側に書かれた f を先に施すことは数学では絶対的な約束である.

E の部分集合 A に対し，$g \circ f(A) = g(f(A))$ が成立つ．G の部分集合 B に対し，$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ となる．写像の合成は結合的である．すなわち，f, g, h がそれぞれ E から F, F から G, G から H への写像ならば，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成立つ．これを $h \circ g \circ f$ と書く.

f^{-1} が E から F への双射 f の逆双射ならば，$f^{-1} \circ f = I_E$ となる．ただし I_E は E の恒等写像である．逆に，f が E から F への写像，g が F から E への写像で，$g \circ f = I_E$, $f \circ g = I_F$ が成立てば，f は双射であり，g は f の逆双射である.

f が E から F への双射，g が F から G への双射ならば，$g \circ f$ は E から G への双射であり，その逆双射は $f^{-1} \circ g^{-1}$ である.

f を E から F への写像，A を E の部分集合とする．A の元 x に対して $f_A(x) = f(x)$ として得られる A から F への写像 f_A を，f の A への**制限**と言い，普通 $f|A$ と書く．このとき，f を，A から F への写像 f_A の E への**延長**と言う．もちろん，f_A のかわりに単に f と書くことも多い.

同様に，f が E から F への写像で $f(\mathrm{E})\subset \mathrm{B}$ であるとき，f は E から B への写像 $f_{\mathbf{B}}$ を定義する：$f_{\mathbf{B}}(x)=f(x)$．実際には $f_{\mathbf{B}}$ のかわりに f と書いてすませる．

変数変換と関数変換

f を E で定義され，F に値を取る関数とする．u が E_1 から E への関数であるとき，E_1 で定義されて F に値を取る関数 $f_1=f\circ u$ が定義される．これを，**変数変換** u を行なった，または始集合の変換 $\mathrm{E}_1 \xrightarrow{u} \mathrm{E}$ を行なったと言い，関数 f_1 を，変数変換 u による f の**逆像**と言う．$f(x)$ の式の x に $x=u(x_1)$ を代入すれば $f_1(x_1)$ $(x_1\in \mathrm{E}_1)$ の式が得られる．$f_1=u^*f$ とも書き，また変数変換 u を明示する必要のないときには f^* とも書く：

(2. 6)　　$u^*f(x_1)=f(u(x_1))$　あるいは　$f^*(x_1)=f(u(x_1))$.

実際には，f_1 を f と同一視し，同じ関数（！）を変数 x のかわりに変数 x_1 で表わしたものだと言うことがある．これはもちろん言葉の誤用であり，便利ではあるが，よく気を付けないと重大な誤りを犯すおそれもある．

つぎに F から F_2 への写像 v があると，E で定義されて F_2 に値を取る関数 $f_2=v\circ f$ が定義される．これを，**関数変換** v を行なった，または終集合の変換 $\mathrm{F} \xrightarrow{v} \mathrm{F}_2$ を行なったと言い，関数 f_2 を，関数変換 v による f の**順像**と言う．

変数変換と関数変換とを同時に行ない，それによる像 $f_3=v\circ f\circ u$ を考えることもできる．しかし，これはもう逆像でも順像でもない．

§ 3.　同値関係．商集合

E を集合とする．E の二元にかかわる関係（これを**二項関係**と言う）が一つあると，この関係を充たすような組 $(x, y)\in \mathrm{E}^2$ 全体の集合が定まる．たとえば

$$x=y,\quad x\leqslant y,\quad x>y,\quad x^2=y^3,\quad (x^2+y^2\geqslant 1,\ x\neq 0)$$

等はいずれも実数のあいだの二項関係である．そして，E 上の二項関係とは，積 $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ の一つの部分集合 R のことにほかならない．

この節とつぎの節とで，とくに大切な二項関係を調べる．

二項関係 R がつぎの三条件を充たすとき，それを**同値関係**と言う：

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \text{a) 反射性：どの } x \in \mathrm{E} \text{ に対しても } (x,\ x) \in \mathrm{R}. \\ \text{b) 対称性：} (x,\ y) \in \mathrm{R} \text{ ならば } (y,\ x) \in \mathrm{R}. \\ \text{c) 推移性：} (x,\ y) \in \mathrm{R},\ (y,\ z) \in \mathrm{R} \text{ ならば } (x,\ z) \in \mathrm{R}. \end{cases}
$$

R が同値関係のとき，$(x,\ y) \in \mathrm{R}$ と書くかわりに，$x \sim_{\mathrm{R}} y$ と書いたり，$x \equiv y\ (\mathrm{mod.\ R})$ と書いたりし，x は R を法として y に**合同**（または**同値**）であると言う．また，関係 R が問題になっていることが明らかな場合には，単に $x \sim y$ とか $x \equiv y$ とか書く．

例． はじめに挙げた二項関係の例のうち，最初のもの以外は同値関係ではない．つぎに挙げるものはすべて同値関係である．証明はやさしい．

1° $\mathbf{Z}$ を整数全部の集合とする．$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ の元 $(p,\ q)$ で $q \neq 0$ なるもの全部の集合において，つぎの関係は同値関係である：

$$
(3.2)\qquad pq' - p'q = 0 \text{ のとき } \quad (p,\ q) \equiv (p',\ q').
$$

2° 実変数の正実数値関数全部の集合，すなわち $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}_+ = \{x\,;\, x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0\}$ への写像の全体を E とする．同値関係 $f \equiv g$ を，f と g とが $x \to +\infty$ に対して《同値》になるとき，すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な x_0 を取ると，$x \geqslant x_0$ ならば $f(x)(1-\varepsilon) \leqslant g(x) \leqslant f(x)(1+\varepsilon)$，が成立つとき，として定義する．

3° 整数の全体 $\mathbf{Z}$ において，$p-q$ がある与えられた整数 m で割切れるときに $p \equiv q$ として同値関係 $\equiv$ が定義される．普通これを $p \equiv q\ (\mathrm{mod.}\ m)$ と書く．

4° 平面上の直線の全体を E とする．二直線 D, D′ が平行であるかまたは一致するとき $\mathrm{D} \equiv \mathrm{D}'$ として，E に同値関係が定義される．

5° 二つの平面の積集合を E とする．E の点 (A, B) は A を始点，B を終点とするベクトル（**固定ベクトル**）とみなされる．二つのベクトル (A, B), (A′, B′) が同値，すなわち平行移動によって重ね合わすことができるとき，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) \sim (\mathrm{A}',\ \mathrm{B}')$ として E の同値関係が定義される．

6° 上の集合 E において，(A, B), (A′, B′) が同一直線上にあってしかも平行移動によって重ね合わすことができるときに $(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) \sim (\mathrm{A}',\ \mathrm{B}')$ としても同値関係となる．

同値類．分割

集合 E に同値関係 R が与えられているとき，ある一つの元に同値な元全部のつくる部分集合を**同値類**と言う．

定理 1.　二つの同値類はまったく一致するか，または共通元を持たないかのいずれかである．

証明.　A, B を二つの同値類とする．A, B が共通元 x を持つとしよう．A はそのある元 a に同値な元の全体であり，一方 a と x とは同値だから，推移性 c) により，A は x に同値な元の全体でもある．同様に B も x に同値な元の全体であり，したがって A と一致する．　終.

この証明から分るように，同値類の中の元はすべてたがいに同値である．また，同値類は E の**分割**を定める．すなわち，E はたがいに共通元を持たない空でない部分集合いくつかの合併集合となる．これらの部分集合が分れば，同値関係が分ったことになる．すなわち同じ同値類に属する二元がたがいに同値である．逆に E の任意の分割 $\mathrm{E}=\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ （A_i は空でなく，たがいに共通点を持たない）は一つの同値関係を定める．すなわち，ある $i\in\mathrm{I}$ に対して $x, y\in\mathrm{A}_i$ のとき $x\equiv y$ とすればよい．このとき各 A_i はこの同値関係の同値類となる．とくに，f が E から F への上射のとき，関係 $f(x)=f(y)$ は E 上の同値関係であり，各 $f^{-1}(\{z\})$ （$z\in\mathrm{F}$）は同値類である．

商　集　合

E を集合，R を E 上の同値関係とする．この同値類全部のつくる集合を E の R による**商集合**と言い，E/R と書く．E の元 x の属する同値類を $\dot{x}$ と書くと，$x\in\dot{x}$ であり，$\dot{x}$ は商集合の元である．

E の各元 x にその同値類 $\dot{x}$ を対応させる写像を E から E/R への**標準上射**と言う．これはもちろん上射である．逆に，前項で見たように，E からある集合 F への上射は一つの同値関係 R を定める．F の各元 z に対して同値類 $f^{-1}(\{z\})$ を対応させる写像は F から E/R への双射である．したがって，F は商集合 E/R の《モデル》とみなされる．

つぎに前ページで与えた同値関係の例について，その商集合の簡単な解釈を与えよう．

1°　商集合は有理数の全体 **Q** にほかならない．なぜなら，有理数の定義がまさに $q\neq 0$ なる組 (p, q) であり，$pq'-p'q=0$ のときには (p, q), (p', q') は同じ有理数を与えるからである．

3°　商集合の元は m を法とする整数と呼ばれるものであり，商集合はその全体である．

4°　商集合は平面上の方向の全体である．

5° 商集合は平面上の自由ベクトルの全体である. これを平面に付随する線型空間と言う. 固定ベクトル (A, B) の同値類を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書き, 自由ベクトル AB と読む.

6° 商集合は, 力学で使われる平面の《滑ベクトル》の全体である.

群の不変部分群による商群

G を群とし, その算法は乗法で書かれているとする : $(x, y) \mapsto xy$ (G × G から G への写像). Γ を不変部分群とする*). つぎの二項関係を考えよう : «G の二元 x, y に対し, Γ の元 a で $y = ax$ となるものが存在するとき, 言換えれば $yx^{-1} \in \Gamma$ のとき, $x \equiv y$» と置く. これは G の同値関係であり, その同値類は G の Γ による《右剰余類》と呼ばれる. Γ が不変部分群なので, もう一つの同値関係 «G の二元 x, y に対し, Γ の元 a で $y = xa$ となるものが存在するとき, 言換えれば $x^{-1}y \in \Gamma$ のとき, $x \equiv y$» ははじめの同値関係と一致し, 右剰余類と左剰余類とは一致する. α, β を二つの剰余類とすると, 任意の $x \in \alpha$, $y \in \beta$ に対し, 積 xy は同一の剰余類に属する. この類を αβ と書くと, 算法 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ によって商集合は新たな群となる. これを G/Γ と書き, 不変部分群 Γ による G の**商群**と言う.

線型空間の部分空間による商線型空間

E を体 K 上の線型空間とし, F をその部分線型空間とする. E 上につぎの二項関係を考える : «差 $x - y$ は F に属する». これは同値関係である. 実際, E はその加法によって可換群であり, F は不変部分群 (可換群の部分群はすべて不変部分群) であるから, この関係は前項の同値関係の特別な場合である. 商群を E/F とする. これも可換群だから, 算法は加法的に書く.

$\lambda \in K$ がスカラー, α が同値類のとき, α の任意の元 x ($\dot{x} = \alpha$) に対し, λx はつねに同一の同値類に属する. これを λα と書く. すると, E/F 上の加法といま定義したスカラー乗法 $(\lambda, \alpha) \mapsto \lambda\alpha$ によって E/F は K 上の線型空間となる. これを E の部分線型空間 F による**商線型空間**と言う. E/F の算法の定義そのものから, $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in K$ に対して, $(x + y)^{\cdot} = \dot{x} + \dot{y}$, $(\lambda x)^{\cdot} = \lambda\dot{x}$ となる. 言換えれば, E から E/F への標準上射 $x \mapsto \dot{x}$ は線型写像である.

もちろん, F = {0} でないかぎり, 標準上射は双射ではない. しかし, G を

*) 不変部分群は正規部分群とも呼ばれる. すなわち, G の部分群 Γ で, 任意の $a \in G$, $x \in \Gamma$ に対して $axa^{-1} \in \Gamma$ となるもののことである.

F の E の中での補線型部分空間とすると，標準上射の G への制限は G から E/F への双射となる*)．証明．a）まずそれは単射である．なぜなら，x, y が G の元で $\dot{x}=\dot{y}$ とすると $x-y\in$ F である．一方，G は部分線型空間だから $x-y\in$ G でもある．F, G の共通元は 0 だけだから $x=y$ となる．b）つぎにそれは上射である．なぜなら，α を同値類とするとき，α の元 x を取ると，$x=x'+x''$, $x'\in$ F, $x''\in$ G と書くことができ，したがって $\dot{x}''=\dot{x}=\alpha$ となる．　終．

かくして，G から E/F への写像 $x\mapsto\dot{x}$ は線型双射である．すなわち双射であってしかも線型空間の構造を変えない．だから G は商線型空間 E/F のモデルとみなされる．とくに，G の次元は E/F の次元に等しい**)．

§4. 順　序　関　係

集合 E 上の二項関係 R がつぎの三条件を充たすとき，R を**順序関係**と言う：

(4.1)
- a）反射性：$(x, x)\in$ R.
- b）推移性：$(x, y)\in$ R, $(y, z)\in$ R ならば $(x, z)\in$ R.
- c）反対称性：$(x, y)\in$ R, $(y, x)\in$ R ならば $x=y$.

このとき，$(x, y)\in$ R と書くかわりに，$x\preccurlyeq_{R} y$ と書いたり，また当の順序関係がすでに指定されていて，操返す必要のないときには，単に $x\preccurlyeq y$ と書いたりする．このとき，$y\succcurlyeq x$ は $x\preccurlyeq y$ と同じ意味とする．この記号を使うと，不等式 (4.1) はつぎのようになる：

a）$x\preccurlyeq x$.

b）$x\preccurlyeq y$, $y\preccurlyeq z$ ならば $x\preccurlyeq z$.

c）$x\preccurlyeq y$, $y\preccurlyeq x$ ならば $x=y$.

順序関係の例

1° 0 以上の整数の全体 **N**，全整数 **Z**，全有理数 **Q**，全実数 **R** 等において，普通の大小関係 $x\leqslant y$ によって関係 $(x, y)\in$ R を定めれば，R は順序関係である．

2 逆の大小関係 $x\geqslant y$ によって $(x, y)\in$ R を定めても，R は順序関係であ

---

*) E の各元は，F のある元と G のある元との和としてちょうど一通りに表わすことができる．

**) われわれは商線型空間 E/F を実際に作ってみせたのだから，E/F はつねに存在する．しかし，F の E の中での補空間 G はつねに存在するだろうか．E が有限次元ならばこれは明らかだが，実はいつでも存在するのである．これは認めよう．

る．これを逆順序関係と言う．

記号 $\preccurlyeq$ は記号 $\leqslant$ からの類推である． したがって， 関係 $x \preccurlyeq y$, $x \prec y$, $y \succcurlyeq x$, $y \succ x$ は，それぞれ， x は y より小さい， x は y より真に小さい， y は x より大きい，y は x より真に大きい，と読むわけである． 関係 $x \prec y$ は «$x \preccurlyeq y$ かつ $x \neq y$» を意味する．

ここで，われわれはいままでに身についていた用語の習慣を破ったことに注意しよう． すなわち，«小さい» とは普通 «小さいかまたは等しい» ということであり，«真に小さい» とは普通 «小さい» ということである． こう変えた方がよいということは段々分るが，とにかく記号 $\preccurlyeq$ の方が頻繁に使われるのであり，それに短いことばを与える方がよいのである．できるだけ $\prec$ を使わずに $\preccurlyeq$ を使う方がよい．もし $\prec$ を使ったら，そこには $\prec$ を使わなければならない，すなわち $\preccurlyeq$ ではすまされない微妙な理由があることを示す．たとえば，実変数関数 f のある点 a での連続性はつぎのように書かれる：

«任意の $\varepsilon > 0$ に対し， 適当な $\eta > 0$ を取ると，$|x-a| \leqslant \eta$ なるかぎり必ず $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$ となる»．

今後できるかぎり広義の不等号を使い，狭義の不等号 >0 は， どうしてもそれが必要なときにかぎって使う．

さて，任意の順序関係 $\preccurlyeq$ の用語を，実数間の大小関係 $\leqslant$ からの類推ですませると，ちょっとした困難もある．なぜなら，$x \geqslant y$ によって決まる順序関係のときにも，«x は y より小さい» と言うことになるからだ．

2° フランス語の単語の全体にはアルファベット順という順序関係がある（ただし，同じつづりの語は同じ語とみなさなければならない）．

3° 集合 F の部分集合の全体 $\mathrm{E} = \mathfrak{P}(\mathrm{F})$ には，$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ のとき $\mathrm{X} \preccurlyeq \mathrm{Y}$ とする順序関係が存在する．

4° ある集合 F 上の実数値関数の全体 $\mathrm{E} = \mathbf{R}^{\mathrm{F}}$ には自然な順序関係が存在する．すなわち，F のすべての点 x に対して $f(x) \leqslant g(x)$ のとき $f \preccurlyeq g$，としたものである．

この順序関係において，$f \prec g$ は，あらゆる x に対して $f(x) \leqslant g(x)$ となり， かつ少なくとも一つの x に対して $f(x) < g(x)$ となることを意味する．すべての x に対して $f(x) < g(x)$ となることを意味するのではない．

5° 1 以上の整数全体 $\mathbf{N}_1$ において， a が b を割切るとき $a \preccurlyeq b$ とすれば順序関係である．この関係は整数論で重要である．

6° 任意の集合 E で， $x = y$ のときだけ $x \preccurlyeq y$ とすると順序関係である．これを**乱順序関係**と言う．

集合 E の順序関係において，任意の $x, y \in E$ に対して $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$ のうちの一つが必ず成立つとき，この順序関係を**全順序関係**と言い，E を**全順序集合**と言う．

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ における順序は全順序である．フランス語の単語のあいだのアルファベット順もそうである．しかし，例 3°，4°，5° は全順序関係ではない．

二つの元 x, y が $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$ のどれをも充たさないとき，x, y は**比較不能**であると言う．例 3° では，F の空でない二つの部分集合が共通元を持たなければ比較不能である（F は少なくとも二つの元を持つと仮定する）．例 4° でも F が二つ以上の元を持つとして，定値関数 $0 : x \mapsto 0$ と，F の一点 a で 1，他の点で -1 となる関数 f とは比較不能である．例 5° では整数 2 と 3 とは比較不能である．例 6° では相異なる元は比較不能である．

上にまたは下に有界な部分集合．最大元．上限

順序集合 E の部分集合 A に対し，A のどの元よりも大きい E の元が存在するとき，A は**上有界**であると言う．このような元はすべて A の**上界**と呼ばれる．**下有界部分集合**および**下界**も同様に定義される．

同時に上有界かつ下有界な部分集合は**有界**であると言う．

E の部分集合 A が，A に属する上界を持つとき，A は**最大元**を持つと言う．最大元は存在するとはかぎらないが，もし存在すれば一つしかない．実際，もし a, b がともに A の最大元だとすると $a \preccurlyeq b$ かつ $b \preccurlyeq a$ だから $a = b$ となる．A の最大元を $\operatorname*{Max}_{x \in A} x$ または Max(A) と書く．**最小元**も同様に定義される．記号 Min を使う．

E の部分集合 A の上界全部の集合が最小元を持つとき，この元を A の**上限**と言う．上限はすなわち最小上界である．A の上界はどれも A の上限より大きい．

上限は存在するとはかぎらないが，もし存在すれば一つしかない．これを $\operatorname*{Sup}_{x \in A} x$ または Sup(A) と書く．もし A の上限が A に属するならばそれは A の最大元であり，逆に A が最大元を持てばそれは A の上限である．**下限**も同様に定義される．記号 Inf を用いる．

定理 2.　普通の大小関係を備えた実数直線 $\mathbf{R}$ において，空でない上有界部分集合は，必ず上限を持ち，空でない下有界部分集合は，必ず下限を持つ*)．さらに，上有界部分集合 A の上限 b はつぎの二性質によって

---

*) «空でない» という仮定は本質的である．空集合 $\varnothing$ は上有界で，任意の実数がその上界で ↘

特徴づけられる：

a） $x \in \mathrm{A}$ ならば $x \leqslant b$.

b） $b_1 < b$ なる任意の b_1 に対し，$b_1 \leqslant x \leqslant b$ なる A の元 x が少なくとも一つ存在する.

この定理の証明はすでに知っているものとしよう．もちろん上有界でない集合は上限を持たない．**R** 自身は上有界でも下有界でもない.

集合 F の部分集合の全体 E 上の順序関係 $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ (例 3°) に対して，E の任意の部分集合は上限および下限を持つ．実際，E の部分集合は F の部分集合のある集合だから，その上限はそれらの合併集合，下限は共通部分である.

集合 F 上の実数値関数の全体 E (例 4°) では，任意の上有界部分集合は上限を持ち，任意の下有界部分集合は下限を持つ．実際，A が上有界のとき，つぎの関数 f_0：

$$f_0(x) = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathrm{A}} f(x) \qquad (x \in \mathrm{F}) \tag{4.2}$$

が A の上限である.

ここで，一見似たような，しかしまったく異なる二つのともに有用な概念があることに注意しよう．この二つを混同してはならない．一つは順序集合 $\mathbf{R}^{\mathrm{F}}$ における A の上限である．これは実数値関数で，A に属する関数族の**上限値関数**と呼ばれる．もう一つは f が A のあらゆる関数を動き，x が F のあらゆる元を動くときの関数値の全体の **R** における上限 $\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{F}, f \in \mathrm{A}} f(x)$ である．これは実数であり，A 内の関数族の**上限**と呼ばれる．A がただ一つの関数 f から成るとき，値 $f(x)$ の上限 $\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{F}} f(x)$ について語ることができる．これも実数である．もしもこの数がある x に対する f の値であるとき，これを f の**最大値**と呼ぶ.

下限値関数と**下限**とに関しても同様である．これらの用語や記号は一般に使われているが，あまり首尾一貫していないのでやや危険である.

1 以上の整数の全体 $\mathbf{N}_1$ に例 5° の順序関係を入れたとき，任意の有限部分集合は上限と下限とを持つ．上限は最小公倍数，下限は最大公約数である.

増 加 関 数

E, F を二つの順序集合，f を E から F への写像とする．つぎの条件

$$x \prec y \text{ ならば } f(x) \prec f(y) \tag{4.3}$$

↘ ある．したがって ∅ の上界の全体は **R** 自身で，それは最小元を持たない！ ∅ は有界であるが上限も下限も持たない！

が充たされるとき，f を**増加関数**と言う．さらに条件

(4. 4)　　$x \prec y$ ならば $f(x) \prec f(y)$

が充たされるとき，f を**真増加関数**と言う．

減小関数，**真減小関数**も同様に定義される．

E が全順序集合ならば，同時に増加関数かつ減小関数である関数は定値関数である．実際，x, y を E の二元とするとかならず $x \preccurlyeq y$ か $x \succcurlyeq y$ かのどちらかが成立つから，$f(x) \preccurlyeq f(y)$, $f(x) \succcurlyeq f(y)$ が両方とも成立つことになり，$f(x) = f(y)$ となる[*]．

順序集合 E の二元 a, b が $a \preccurlyeq b$ を充たすとき，E の元 x で $a \preccurlyeq x \preccurlyeq b$ を充たすものの全体を**閉区間**と言い，$[a, b]$ で表わす．また，$a \prec x \prec b$ を充たすような x の全体を**開区間**と言い，$]a, b[$ で表わす．$a \preccurlyeq x \prec b$ なる x の全体を $[a, b[$ と書き，$a \prec x \preccurlyeq b$ なる x の全体を $]a, b]$ と書き，それぞれ**半開区間**と呼ぶ．どの場合にも a をその区間の**始点**，b を**終点**と呼ぶ．また a, b 合わせてその区間の**両端**と言う．ときには始点 a, 終点 b の区間を，それが開であるとか閉であるとか半開であるとかということは問題外として考えることもある．このときは記号 $|a, b|$ を使う．

$a \preccurlyeq x$ なる x の全体を**閉右切片**と言い，$[a, \rightarrow)$ と書き，$a \prec x$ なる x の全体を**開右切片**と言い，$]a, \rightarrow)$ と書く．**左切片** $(\leftarrow, a]$ および $(\leftarrow, a[$ も同様に定義される．

自然な順序構造を備えた実数直線 $\mathbf{R}$ の場合には，これらの切片は**半直線**と呼ばれる．

切片も区間の一つと考える方が便利である．E 全体も特殊な区間と考える．

補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$

実数直線 $\mathbf{R}$ に，$-\infty$, $+\infty$ とそれぞれ記される二つの元を加えた集合 $\overline{\mathbf{R}}$ を**補完実数直線**と言う．$\overline{\mathbf{R}}$ の順序関係はつぎのように定める：$\overline{\mathbf{R}}$ の二元 a, b に対し，a, b がともに有限実数で $\mathbf{R}$ の順序によって $a \leqslant b$ であるか，または $a = -\infty$ であるか，または $b = +\infty$ であるかのどれか一つが成立つとき，$a \leqslant b$ と定める．$\overline{\mathbf{R}}$ も全順序集合であり，最小元 $-\infty$ および最大元 $+\infty$ を持つ．$\overline{\mathbf{R}}$ の任意の部分集合は有界であり，しかも定理 2 が成立つ．この場合，A が上有界であると仮定する必要もない（どの A も上有界である)[**]．$a \in \overline{\mathbf{R}}$

---

[*] E が全順序集合であるという仮定は除けない．たとえば E を乱順序集合とすると，E から F への任意の写像は同時に増加関数かつ減小関数である（例 6° 参照）．

[**] 空集合 $\varnothing$ の上限は $\overline{\mathbf{R}}$ の最小元，すなわち $-\infty$ である（14 ページの脚注参照）．下限は ↗

ならば $\overline{\mathbf{R}}$ の区間 $]a, +\infty[$ は $\mathbf{R}$ に含まれる. だから $\mathbf{R}$ の半直線 $[a, \rightarrow)$ のことを $[a, +\infty[$ と書いてもよい. 同様に $\mathbf{R}$ の部分集合 A が上有界でないとき, A を $\overline{\mathbf{R}}$ の部分集合と考えて $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ と書く.

§ 5. 濃度. 可算集合

N から **N** 自身への写像で, **N** の各元にその二倍を対応させるものを考えてみよう. これは一対一 (すなわち単射) であるから, ある意味で, 偶数というのは整数全部と同じだけ存在すると言える. すなわち, 無限集合の場合には, その集合からある真部分集合 (すなわち自分自身と異なる部分集合) への双射が存在するわけである. こういうわけで, 無限集合の大きさを比較しようという試みは無謀に見えるかもしれないが, 実は双射の概念の助けを借りてこれを実行することができるのである.

定理 3 (ベルンシュタイン).

E, F を二つの集合とする.

1° E から F への単射または F から E への単射が必ず存在する (もちろん両方存在することもある).

2° E から F への単射と F から E への単射とが両方とも存在すれば, E から F への双射が存在する.

この定理は証明なしで承認しよう.

系. 二つの集合 E, F に対し, つぎの三つの場合のどれか一つだけが必ず当てはまる:

a) E から F への単射が存在し, F から E への単射は存在しない. この場合, F は E よりも**真に濃い**, あるいは E は F よりも**真に薄い**と言う.

b) F から E への単射が存在し, E から F への単射は存在しない. この場合, E は F よりも真に濃く, F は E よりも真に薄い.

c) E から F への双射が存在する. この場合, E と F とは**等濃**である, あるいは**対等**であると言う*).

↘ $+\infty$ である. A が空集合でなければ, $\mathrm{Sup}(A) \geqslant \mathrm{Inf}(A)$ が成立つが, これは空集合のときには成立たない.

*) ベルンシュタインの定理の証明は難かしい. ここでは証明せずにそれを認める. しかし, 系は定理からすぐ出る. E が F と対等であるかまたは F より真に薄いとき, E は F より薄いと言う.

濃度. 基数

«E と F とは対等である» という関係は集合のあいだの同値関係である[*]. この同値類すなわちある集合に対等な集合全部の類を**濃度**あるいは**基数**と言う. 有限基数とは有限集合の同値類のことで, それらは自然数 0, 1, 2 等々によって表わされる. (自然数の概念ははじめから分っているものと仮定していることに注意せよ. 実際には, これの厳密な数学的定義は非常に難かしい. とくに, 有限集合を定義するのもやさしくない. しばしば, 有限集合の定義として, その集合がそのどの真部分集合とも対等でない, という性質をもってする. そして有限基数の全体が, 我々になじみな自然数の諸性質を持っていることを証明するのである). 有限でない基数, すなわち無限集合の基数のことを**超限基数**または**超限数**と言う.

基数のあいだには順序関係が存在する. すなわち, 二つの基数 α, β に対し, α が濃度 β の集合のある部分集合の基数であるとき $\alpha \leqslant \beta$ であるとする. 定理 3 によってこの関係が反対称的であることが分り, したがって順序関係であることが分る. さらに定理 3 により, これが全順序であることも分る. すなわち二つの基数はつねに比較可能である.

E, F が集合で, E から F への上射 f が存在すれば, F は E より薄い. 実際, F の各元の逆像はどれも空でないから, 各逆像から一つずつ元を選べば, F と対等な E の部分集合ができる[**]. すなわち, ある同値関係による E の商集合は E よりつねに薄い.

自然数の場合と同様, 基数のあいだにつぎのように加法, 乗法, 巾乗の算法を定義することができる.

1° 基数 α, β に対し, それを濃度とする集合 E, F を取る. E と F とのある «和集合», すなわち集合であって, それぞれが E, F と対等な二つの部分集合に分割されるもの (共通元のない合併集合) の濃度を $\alpha+\beta$ と定義する.

2° 積集合 $E \times F$ の濃度を $\alpha\beta$ と定義する. これはまた, 基数 β を持つ集合 α 個の, たがいに共通元のない合併集合の濃度でもある.

3° F から E への写像の全体 E^F の濃度を α^β と定義する.

---

[*] ここで, 論理的な困難は避けて通ろう. 同値関係は集合の上にしか定義されていないのだが, 集合全部の集合というものは存在しない.

[**] 有限個の集合の一つ一つから一つずつ元を取出すことはやさしい. しかし無限個の集合となると話は厄介である! 今世紀初頭を賑わせた大論争の結果, この選択を可能ならしめるためには, 集合論にそのための公理を置かなければならない, ということが分った. この公理のことを**選択公理**または**ツェルメロの公理**と言う.

定理 4. 基数間のこれらの算法はつぎの性質を持つ．

1° 加法の結合性および交換性

2° 乗法の結合性および交換性

3° 加法に関する乗法の分配性

4° つぎの《指数法則》

$$\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma},\qquad \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma},\qquad (\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}. \tag{5.1}$$

証明. (5.1) 以外は明らかである． E, F, G をそれぞれ濃度が α, β, γ であるような集合とする．すると，E^F, E^G の濃度はそれぞれ α^β, α^γ である．一方，和集合 F + G から E への写像は，それの F および G への制限，すなわち F, G から E への任意の写像によって定まる．すなわち，E^{F+G} の元は，E^F の元と E^G の元との組，すなわち $E^F\times E^G$ の勝手な元である．したがって E^{F+G} は $E^F\times E^G$ と対等であり，$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma$ となる．

つぎに，4 ページから 5 ページにかけて見たように，G から E × F への写像は，G から E への写像と G から F への写像との組，すなわち $E^G\times F^G$ の元である．したがって $(E\times F)^G$ は $E^G\times F^G$ と対等であり，$(\alpha\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\beta^\gamma$ となる．

最後に f を F × G から E への写像とする．G の元 y を固定すると，F から E への写像 $f_y: x\mapsto f(x, y)$ は偏写像と呼ばれるものである：$f_y(x)=f(x, y)$．かくして，$E^{F\times G}$ の元 f によって G から E^F への写像 $y\mapsto f_y$，すなわち $(E^F)^G$ の元が定まる．逆に，G から $(E^F)^G$ の任意の元 $y\mapsto g_y$ に対し，前と同様に F × G から E への写像 $g: g(x, y)=g_y(x)$ が定まる． こうして $E^{F\times G}$ から $(E^F)^G$ への双射が構成された．したがって $\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$ である． 終．

これらの公式を見ると，超限基数のあいだの演算も，自然数の普通の演算と同じような性質のものだと思うかもしれない．しかし実はそんなことはないので，つぎの驚くべき定理（証明しない）を見ればそれが分る．

定理 5. α, β がともに 0 でない基数で，少なくとも一方が超限基数であるとき，和 $\alpha+\beta$ および積 $\alpha\beta$ は，ともに，α, β の大きい方に一致する*)．

こういう次第で，超限基数の引算は定義できない．α に足して α となるような基数は 0 ばかりでなく，有限基数は全部そうだし，α 自身もそうだから．

定理 6. 集合 E が何であっても，E の部分集合全部の集合は E よりも真に濃い．

したがって超限基数は無限にある．

---

*) 証明は難かしい．

証明.　E から $\mathfrak{P}(E)$ への双射 f が存在したとする．E の各元 x に対して $f(x)$ は $\mathfrak{P}(E)$ の元，すなわち E の部分集合である．E の元 x で $x \notin f(x)$ なるものの全体を A としよう．すると，E の元 y で $f(y)=A$ となるものは存在しない．なぜなら y は $f(y)$ か A かのどちらか一方だけに属するから（定義により，$y \in A$ となるのは $y \notin f(y)$ となるときである）．これは矛盾である．一方，E から $\mathfrak{P}(E)$ への単射は存在する（たとえば $x \mapsto \{x\}$）から，E は $\mathfrak{P}(E)$ より薄い．したがって E は $\mathfrak{P}(E)$ より真に薄い．　終.

注意 1.　これに対し，無限集合 E の有限部分集合全部の集合 $\mathfrak{P}_f(E)$ は E と対等である．これは，あとの定理 7 を使うと簡単に証明できる．E^n $(n \geqslant 1)$ の各元 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に，$x_1, x_2, \cdots, x_n$（これらの元は必ずしもたがいに異なるとは限らない）から成る E の部分集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を対応させる写像は，E^n から，高々 n 個の元から成る空でない E の部分集合の全体 $\mathfrak{P}_n(E)$ への上射である．したがって，$\mathrm{card.}\,\mathfrak{P}_n(E) \leqslant \mathrm{card.}\,E^n = \mathrm{card.}\,E$（定理 5 による．ただし，card. A は集合 A の濃度）．一方，$\mathrm{card.}\,\mathfrak{P}_n(E) \geqslant \mathrm{card.}\,E$ だから $\mathrm{card.}\,\mathfrak{P}_n(E) = \mathrm{card.}\,E$ となる．そこで，$f_n : x \mapsto f_n(x)$ を E から $\mathfrak{P}_n(E)$ への双射とする．さらに，$x \in E$ に対して $f_0(x) = \varnothing$ と置く．すると，写像 $(n, x) \mapsto f_n(x)$ は $\mathbf{N} \times E$ から $\mathfrak{P}_f(E)$ への上射であり，したがって $\mathrm{card.}\,\mathfrak{P}_f(E) \leqslant \mathrm{card.}\,(\mathbf{N} \times E) = \nu \cdot \mathrm{card.}\,E = \mathrm{card.}\,E$ となる（定理 7 によって $\nu = \mathrm{card.}\,\mathbf{N} \leqslant \mathrm{card.}\,E$ だから，定理 5 が使える）．よって $\mathfrak{P}_f(E) = \mathrm{card.}\,E$ となる．　終.

注意 2.　E の部分集合 A に対し，つぎの式で定義される E 上の関数 φ_A（値は 0, 1 の二つ）を A の**特性関数**と言う：

(5. 2)　$x \in A$ ならば $\varphi_A(x) = 1$,　　$x \notin A$ ならば $\varphi_A(x) = 0$.

部分集合はその特性関数によって決定される．しかも，値 0, 1 のみを取る E 上の任意の関数は，E のある部分集合を定める．したがって，集合 $\mathfrak{P}(E)$ から集合 $\{0, 1\}^E$ への双射が存し，$\mathrm{card.}\,\mathfrak{P}(E) = 2^{\mathrm{card.}\,E}$ となる．このことから，定理 6 はつぎのように言表わされる：

任意の基数 α に対して $2^\alpha > \alpha$ が成立つ*).

以下，もっとも重要な二つの超限濃度，すなわち可算濃度と連続濃度とについて調べよう．

可 算 集 合

自然数の全体 **N** の濃度を**可算濃度**と言い，ν で表わす．**N** と対等な集合を可算集合と言う**).

*)　とくに，任意の整数 $n \geqslant 0$ に対して $2^n > n$ となる．

)　ある集合が可算だと言うとき，それは，その集合から **N への双射が少なくとも一つ存在することを意味する．この双射はあらかじめ与えられているわけではなく，ある一つの双射が，他の ↗

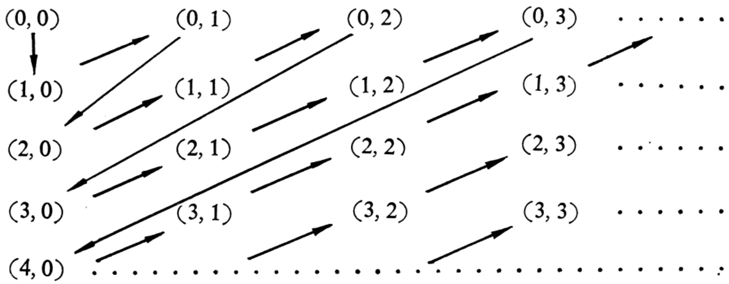
定理 7.　ν はもっとも小さい超限基数である．

すなわち，無限集合 E は必ず可算部分集合を少なくとも一つ含む，というのである．

証明.　card. E $>\nu$ でなければ，定理 3 により，E から $\mathbf{N}$ のある（無限）部分集合 P への双射が存在する．一方 $\mathbf{N}$ から P への標準双射，すなわち $n \mapsto x_n$ （x_n は P の元を大きさの順に並べたときの $(n+1)$ 番目の元）が存在するから，card. E $=\nu$ となる．　終．

定理 8.　1 以上の任意の有限整数 m に対し，$m\nu=\nu$, $\nu^m=\nu$ が成立つ．

これらは定理 5 を使えばすぐ出る．まず $m\leqslant\nu$ だから $m\nu=\nu$ であり，また $\nu^2=\nu\nu=\nu$ だから m に関する帰納法によって $\nu^m=\nu$ となる．しかし我々は定理 5 を証明しなかった．実は定理 5 を使わなくても $\nu\nu=\nu$ はまったく初等的に証明でき，定理 8 はそれからただちに出るのである．実際，$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ が $\mathbf{N}$ と対等なことを示そう．下の図に示すように $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ の元を全部座標式に書き上げ，図の矢印に従ってそれを端から全部数え上げることができる：



こうして，列 (0, 0)，(1, 0)，(0, 1)，(2, 0)，(1, 1)，(0, 2)，… ができ，これが $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ への双射を与える．

系 1.　集合 E の有限または可算部分集合の有限個または可算個の合併集合はまた有限または可算である．

証明.　I を $\mathbf{N}$ の部分集合，A_i $(i\in\mathrm{I})$ を問題の E の部分集合とする．どの A_i も

↘ 双射よりも特に重要だということも普通はない．言換えると，この集合のあらゆる元を一つの列 x_0, x_1, …, x_n, … に並べることはできるが，この列はあらかじめ与えられているのではない．$\mathbf{N}$ の基数を $\aleph^0$（$\aleph$ はヘブライ字母の第一文字である）と書くこともある（アレフゼロと読む）．また多くの書物で，濃度が高々 ν の集合を可算集合と言っている．E が有限または可算（すなわち card. E $\leqslant\nu$，定理 7 参照）であるためには E から $\mathbf{N}$ への単射が存在することが必要十分であり，とくに E $\neq\varnothing$ とすれば，$\mathbf{N}$ から E への上射が存在することが必要十分である．

空集合ではないと仮定してよい（空集合があっても合併集合には影響を与えない）．f_i を $\mathbf{N}$ から A_i への上射とすると，$(i, n) \mapsto f_i(n)$ は $\mathrm{I} \times \mathbf{N}$ から $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ への上射である．$\mathrm{I} \times \mathbf{N}$ は可算集合（I が空集合ならば空集合）だから $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ は有限集合または可算集合である．　終．

系 2.　整数の全体 $\mathbf{Z}$ は可算集合である．実際，それは二つの可算集合の合併である．有理数の全体 $\mathbf{Q}$ も可算である．

なぜなら，$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ の元 (p, q)，$q \neq 0$ に有理数 $\frac{p}{q}$ を対応させる写像は，$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ のある部分集合から $\mathbf{Q}$ への上射であるから，$\mathbf{Q}$ は高々可算である．一方 $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{N}$ を含むから，たしかに可算集合である．

系 3.　代数的実数の全体も可算集合である．ただし，代数的実数とは，実数であって，恒等的に零ではない整係数の多項式の根になるもののことである．

証明.　恒等的に零でない整係数多項式で次数が m 以下のものは $m+1$ 個の係数によって決まり，各係数は整数であるから，これら全部の集合の濃度は $\nu^{m+1} = \nu$ である．またこのような多項式の実根の数は高々 m である．したがって，m 次以下の代数的実数の全体は，有限集合の可算個の合併集合だから高々可算である．一方それは無限集合だからちょうど可算集合となる．m を動かすことにより，代数的実数の全体は，可算集合の可算個の合併として表わされ，したがってそれ自身可算集合である．　終．

系 4.　$\mathbf{R}^n$ の点でその座標がすべて有理数ないし代数的数であるようなものの全体は可算集合である．

実際，その濃度は $\nu^n = \nu$ である．

連 続 濃 度

定理 9.　実数の全体は可算でない．

証明.　$0 \leqq x < 1$ なる実数だけですでに可算でないことが示される．かりにこの集合 E が可算であったと仮定しよう．すると，$\mathbf{N}_1$ から E への双射が存在する，すなわち E のすべての元は一列に $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ と並べられる．

そこでつぎのような実数 ξ を考える．小数点の前には 0 を置く．小数点第 j 位には，x_j の十進展開小数点第 j 位の数と異なるような，1 から 8 までの勝手な数を置く．すると，これを十進小数展開とする実数 ξ はどの x_n とも異なる．なぜなら，それらの小数点第 n 位の数が異なっており，しかも ξ の小数点以下の数字はどれも 0 でも 9 でもないからである．（0 や 9 を持つと面倒なことになる．なぜなら，あるところから先が 0 ばかりである数は，あるところから先が 9 ばかりであるようにも書けるからである．例

$0.1020000\cdots=0.1019999\cdots$). かくして矛盾に到達した. 実際, 集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ は区間 $[0, 1[$ の全体だったはずだからである. 終.

注意. $E=[0, 1[$ の元で, その十進小数展開が, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 だけから成るようなものの全体は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^{N}$ に対等であり, したがってその濃度は 8^ν である. 一方 E 自身の濃度は 10^ν を超えない (すでに注意した展開の二重性があるので, 本当に 10^ν に等しいかどうかはすぐには分らない). よって $8^\nu \leqslant \mathrm{card}.E \leqslant 10^\nu$ が成立ち, したがって, $2^\nu \leqslant \mathrm{card}.E \leqslant 16^\nu=(2^4)^\nu=2^{4\nu}=2^\nu$, よって $\mathrm{card}.E=2^\nu$ となる.

定理 9 はだから定理 6 の特別な場合にすぎない. 実際, その証明も定理 6 の証明の特別な場合になっている (ただし十進展開の二重性から来る複雑さがちょっとある).

この集合 E の濃度 2^ν を**連続濃度**と言い, γ で表わす. これはまた実数の全体 $\mathbf{R}$ の濃度でもある ($x \mapsto \log \dfrac{x}{1-x}$ が $]0, 1[$ から $\mathbf{R}$ への双射を与える).

定理 10. 1 以上の任意の有限整数 m に対し,

$$m\gamma=\nu\gamma=\gamma\gamma=\gamma^m=\gamma^\nu=\gamma$$

が成立つ.

証明. これらの基数はすべて γ と γ^ν との間にあるから, $\gamma^\nu=\gamma$ を示せばよい: $\gamma^\nu=(2^\nu)^\nu=2^{\nu^2}=2^\nu=\gamma$. 終.

系*) 1. 複素数全体も連続濃度を持つ.

実際, それは $\mathbf{R}^2$ と対等である.

系 2. 実数体または複素数体上の有限次元線型空間はすべて連続濃度を持つ.

実際, 基底を一つ選ぶと, この空間から $\mathbf{R}^n$ への双射ができるから, 濃度は $\gamma^n=\gamma$ である. 終.

ここで一見奇妙なことが起る. $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ とは対等なのだから, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2$ への双射が存在する. 我々は, 点, 曲線, 曲面などの, いくつかの実径数に依存する族を考えるとき, ある族は三つの実径数に依存し, ある族は二つの実径数に依存するから, 前者の方が後者より大きい, などと簡単に言うことがある. ところが実は $\mathbf{R}^3$ と $\mathbf{R}^2$ とは対等なのだからこれはやや軽率である. これがどういう意味で言われているかは, 位相の章 (第2章) で明らかになるだろう. とにかく, 当面の意味での無限の大きさの比較ということでは全然問題にならないのである.

---

*) これらの系 (1 から 5 まで) や, 他のいろいろな, 可算濃度および連続濃度に関する性質は, 学生に証明させるか, または小人数の教室で証明してみせるとよい. その際, 我々が証明なしで承認した大定理 (定理 3, 4, 5) は使わずに直接証明するのがよい.

系 3.　実数列あるいは複素数列の全体も連続濃度を持つ．

実際，その濃度は $\gamma^\nu = \gamma$ である．

系 4.　実変数の実数値連続関数の全体 E も連続濃度を持つ．

証明.　このような関数にある実数列を対応させることができる．すなわち，有理点での値の列である．**Q** は **N** と対等だから，これは一つの列と考えられる．もちろんこの実数列は勝手なものではありえない．有理点での値を勝手に決めてしまっては，それを実数直線上の連続関数に延長することは一般にはできない．一方，連続関数は対応する実数列によって完全に決まる．したがって，連続関数の全体から実数列全体のある部分集合への双射が得られる．よって E の濃度は連続濃度を超えない．一方，関数にその原点での値を対応させる写像は E から **R** への上射であるから，E の濃度は少なくとも連続濃度である．したがって E はちょうど連続濃度を持つ．　終.

系 5.　実変数の実数値関数の全体，さらに実変数の，値が 0 か 1 だけの関数の全体も，ともに連続濃度より真に大きい濃度を持つ．

実際，それらの濃度はそれぞれ γ^γ および 2^γ であり，$\gamma^\gamma = (2^\nu)^\gamma = 2^{\nu\gamma} = 2^\gamma > \gamma$ だからである．

前の系 4 と合わせると，《大部分の》関数は不連続点を少なくとも一つ持つことが分る．

連続体仮説

連続体仮説とは，2^ν が ν の直後の基数であると想定するものである．もっと一般に，任意の超限基数 α に対して，基数 2^α が α の直後の基数であることを想定するものを**一般連続体仮説**と言う．

最近，連続体仮説は決定不能であることが証明された（ポール・コーエン，1963 年）．すなわち，これを証明することも，その否定を証明することもできない．だからこの仮説を公理として付加えることもできるし，この仮説の否定を公理として付加えることもできる．

超越数

代数的でない実数を**超越実数**と言う．代数的実数の全体は可算であり，一方実数全体は可算でないから，たしかに超越数は存在する．そればかりでなく，実数は《ほとんどすべて》超越数のわけである．そうだからと言って，これこれの数は超越数であると指定するのはやさしくない．実際，e や π が超越数であることを証明することはできるが，これも決してやさしくない．

§ 6. 論理の諸原則

定理というのは普通，仮定と呼ばれるある性質 A から結論と呼ばれるある性質が導かれることを主張する．普通これを簡単に，《A は B を導く》，《A ならば B》などと言い，$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ という記号を使う．

逆定理は必ずしも真でないが，それは $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$ を主張するものである．

定理 $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ とその逆とがともに真であるとき，二つの性質 A，B は同値であると言い，$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ と書く．そして，《A であるためには B であることが必要十分である》という表現が使われる．

性質 A の否定は普通《非 A》とか $\not\mathrm{A}$ とか書かれる．たとえば，x が集合 E に属さないことを $x \notin \mathrm{E}$ と書く．E の部分集合 X，Y に対して X が Y に含まれないことを $\mathrm{X} \not\subset \mathrm{Y}$ と書く（これはもちろん X が Y を含むことを意味するのではない）．

つねに《非（非 A）＝A》であり，また，《A または非 A》が必ず成立つ（排中律）．

定理 11.　命題 $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ が真であるためには，命題 $\not\mathrm{B} \Rightarrow \not\mathrm{A}$ が真であることが必要十分である．

証明.　1°　$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ が真で，$\not\mathrm{B}$ であるとすると，A ではありえない．もし A なら B になってしまって仮定 $\not\mathrm{B}$ に反するから．したがって $\not\mathrm{A}$ である．すなわち $\not\mathrm{B} \Rightarrow \not\mathrm{A}$ が真であることが証明された．

2°　$\not\mathrm{B} \Rightarrow \not\mathrm{A}$ が真ならば，1° によって $\not\not\mathrm{A} \Rightarrow \not\not\mathrm{B}$ も真である．ところが $\not\not\mathrm{A} = \mathrm{A}$，$\not\not\mathrm{B} = \mathrm{B}$ だから $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ が真となる．　終．

例.　有界閉区間 $[a,\ b]$ 上のいたるところ連続な実数値関数は有界である，というのと，$[a,\ b]$ 上の非有界実数値関数は少なくとも一点で不連続である，というのとは同値である．

ある対象が性質 A または性質 B を持つということを，性質 $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ を持つとか性質《A または B》を持つとか言う．数学では《または》という言葉や記号 $\vee$ は，どちらか一方に限るという意味はない．《A または B》と言っても，同時に A かつ B である場合を除外しない．たとえば，A が $x \leqslant 0$ という性質，B が $x \geqslant 0$ という性質のとき，実数 x に対して《A または B》は必ず成立つ．この場合，A でも B でもある $x=0$ の場合も含まれている．

性質 A，B を同時に両方持つことを，性質 $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ を持つとか性質《A かつ B》を持つとか言う．

数学の定理では，《任意の … に対して》，《… であるような … が存在する》という表現が多い．これらを<u>量称</u>と言い，それぞれ量称記号 ∀，∃ で表わす．《A であるような x が存在する》というかわりに，《適当な x を取ると x は性質 A を持つ》と言うこともある．

《任意の …》とか《… 存在する》とかいう表現は，何等かの制限を伴うことが多い．それらの制限は，括弧（　）の中に書き表わす．

実変数の実数値関数 f に対し，それがある点 a で連続であるという性質を考えてみよう．f が a で連続であるというのは，任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な $\eta>0$ を取ると，$|x-a|\leqslant\eta$ なるかぎり $|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$ となるということである．実数 x に対して，$|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$ という性質を $\mathbf{P}$ と書いて，いまのことを言い直すと，任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な $\eta>0$ を取ると，$|x-a|\leqslant\eta$ であるような任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して性質 $\mathbf{P}$ が成立つ，となる．

つぎに f があらゆる点で連続であるということを書くと，（任意の $a\in\mathbf{R}$ に対して）（任意の $\varepsilon>0$ に対して）（適当な $\eta>0$ を取ると）（$|x-a|\leqslant\eta$ なる任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して）性質 $\mathbf{P}$：$|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$ が成立つ，となる．

これをつぎのように記号化して書く：

(6.1)
$$(\forall a\in\mathbf{R})\ (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)\ (\forall x\in\mathbf{R},\ |x-a|\leqslant\eta):\ |f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon.$$

定理 12.　ある性質がいくつかの量称記号 ∀，∃ を含み，そのあとに一つの性質 $\mathbf{P}$ が来るようなものであるとき，その性質の否定は，各量称記号 ∀ を ∃ で，∃ を ∀ で置換え，さらに $\mathbf{P}$ をその否定 $\not{\mathbf{P}}$ で置換えることによって得られる．

たとえば，実変数の実数値関数 f が連続でない．すなわち少なくとも一点で不連続である，という性質はつぎのように書かれる：

(6.2)
$$(\exists a\in\mathbf{R})\ (\exists\varepsilon>0)\ (\forall\eta>0)\ (\exists x\in\mathbf{R},\ |x-a|\leqslant\eta):\ |f(x)-f(a)|>\varepsilon.$$

この手続きは，数の掛算や括弧の取りはずしにおける符号規則のようにまったく機械的に行なわれる．

証明.　まずただ一つの量称記号 ∀ を含む場合を考える：

（$\forall x$，x は $\mathbf{S}$ を充たす）：$\mathbf{P}$.

この否定は，$\mathbf{S}$ を充たすような x で，しかも $\mathbf{P}$ を充たさないものが存在する，ということであるから，

（$\exists x$，x は $\mathbf{S}$ を充たす）：$\not{\mathbf{P}}$ となる．

ただ一つの量称記号 ∃ を含む場合もまったく同様に証明される.

あとは量称記号の個数に関する帰納法による. $n-1$ 個の量称記号を含む場合には証明されたと仮定して, n 個の場合にも成立つことを示せばよい. この性質は, 最初の量称記号が ∀ の場合,

$$(\forall x,\ x \text{ は S を充たす}) : \mathrm{Q}$$

と書くことができ, Q は $n-1$ 個の量称記号を含む性質である. この否定はしたがって

$$(\exists x,\ x \text{ は S を充たす}) : \not{\mathrm{Q}}$$

となる. ところが Q は $n-1$ 個しか量称記号を含まないから, 帰納法の仮定により, 否定 $\not{\mathrm{Q}}$ は Q に定理を適用して得られる. よってこの場合にも定理は成立つ. 最初の量称記号が ∃ の場合も同様である.　終.

注意.　量称記号 ∃ の前に他の量称記号がいくつかある場合には, ∃ に続く文字は, それに先立つ量称に現われる文字の関数であるかもしれない. たとえばある関数がいたるところ連続だという性質では, η は a および ε に依存する. ときには, η が ε だけに依存し, a には依存しないということもありうる. このとき関数は一様連続であると言う. 関数が一様連続であるという性質は, ただの連続性よりも強く, つぎのように書かれる:

$$(6.3)\qquad (\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta > 0)\ (\forall a \in \mathbf{R})\ (\forall x \in \mathbf{R},\ |x-a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

これから分るように, 量称の順序を変えると, その性質は非常に変わってしまう. もっとも強い性質は, ∃ を冒頭に置くことによって得られる:

$$(6.4)\qquad (\exists\eta > 0)\ (\forall a \in \mathbf{R})\ (\forall\varepsilon > 0)\ (\forall x \in \mathbf{R},\ |x-a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

この η を取ると, 区間 $[a-\eta,\ a+\eta]$ の任意の元 x と, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ が成立つ. したがって $|f(x) - f(a)| = 0$, すなわち $f(x) = f(a)$ となる. a を $p\eta$ $(p \in \mathbf{Z})$ の形の数全部を取らせることにより, f は定値関数となる. これが《連続性》の最強の形である!

注意.　我々は集合論や論理を《素朴な》立場から考えた. すなわち, 集合, 等しい, 任意の, 存在する, 導く等の言葉は通常の言語と普通の直観における意味に取った. しかし, これでは厳密な数学的基礎がない. 記号 ∀, ∃, ∈, =, ⇒ 等は, いくつかの《競技規則》に従う単なる記号と考えなければならない. それはあたかも, チェスの遊びで, 馬や城が動き方の指定された駒にすぎず, 実際の馬や城でないようなものである. それはまた, ユークリッド平面が水面ではなく, 球がりんごでないのと同様である. 数学的論理学(集合論を含む)はそれ自身現代数学の一つの分野である. 現在の論理の《無矛盾》性が証明されていないことは注意に値する. ある論理の理論は, ある命題 P とその否定 $\not{\mathrm{P}}$ がともに証明されるとき《矛盾する》と言われる. もしこうなると, あらゆる命題 Q ($\not{\mathrm{Q}}$ も) は真となる. 実際, P ⇒ (P または Q) であり, また ((P または Q) かつ $\not{\mathrm{P}}$) ⇒ Q であるから, (P かつ $\not{\mathrm{P}}$) ⇒ Q となる. しかし, もし現在の集合論が矛盾するとしても, そ

れは破滅を意味するのではない．　そのときには公理の数を減らさなければならないが，それで数学全体が大きな影響を受けることは多分ないだろう！

第2章　位　　　相

§1.　距離空間．基本的な例

集合 E に**距離関数**と称するもの，　すなわち E×E から半直線 $\mathbf{R}_+ = \{x\,;\,x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0\}$ への写像 d で，つぎの三性質を持つものが備わっているとき，E を**距離空間**と言い，E×E の元 $(x,\ y)$ の d による像 $d(x,\ y) \geqslant 0$ を x と y との**距離**と言う：

$$(1.1)\qquad \begin{cases} 1^\circ & \text{対称性}: d(x,\ y) = d(y,\ x). \\ 2^\circ & \text{正値性}: x \neq y \text{ ならば } d(x,\ y) > 0,\ d(x,\ x) = 0. \\ 3^\circ & \text{三角不等式}: d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z). \end{cases}$$

(三角形の二辺の和は他の一辺より大きい).

これからただちに，三角形の一辺は他の二辺の差より大きいことが分る：

$$(1.2)\qquad d(x,\ z) \geqslant |d(x,\ y) - d(y,\ z)|.$$

さらに，E の任意の n 個の点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対して，

$$(1.3)\qquad d(x_1,\ x_n) \leqslant d(x_1,\ x_2) + d(x_2,\ x_3) + \cdots + d(x_{n-1},\ x_n)$$

が成立つ．

まず重要な距離空間の例を挙げよう．

1°　実数直線 $\mathbf{R}$ および複素平面 $\mathbf{C}$ は距離 $d(x,\ y) = |x-y|$ によって距離空間である．この距離を $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ における**自然な距離**と言う．とくに断わらないかぎり，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ はつねにこの自然距離を備えているものとする．

2°　実変数の任意の真に単調な関数 F を一つ決めると，実数直線 $\mathbf{R}$ は距離 $d(x,\ y) = |\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)|$ によって距離空間となる．

3°　n 次元の実ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ および複素エルミート空間 $\mathbf{C}^n$．これは $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ の二点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の距離を $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ と

したものである．

あとで（32 ページ）これが本当に距離空間になることをきちんと証明する．この距離を $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ の**自然な距離**と言う．とくに断わらないかぎり，$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ はつねにこの自然な距離を備えているとする．

4°　任意の集合 E に対し，$d(x, x) = 0$，$x \neq y$ ならば $d(x, y) = 1$ とおくと距離空間になる．この距離を**離散距離**と言う．

球　面．球

距離空間 E の点 a および実数 $\mathrm{R} > 0$ を固定したとき，E の点 x で $d(a, x) = \mathrm{R}$ となるものの全体を，a を中心とする半径 R の**球面**と言う．もちろんこれは空集合かもしれないし，中心のちがう二つの球面が一致することもあり得る（例：離散距離空間では半径 2 の球面はすべて空集合である）．

E の点 x で $d(a, x) < \mathrm{R}$ 〚$d(a, x) \leqslant \mathrm{R}$〛となるもの全体を，$a$ を中心とする半径 R の**開球**〚**閉球**〛と言い，$\mathrm{B}_0(a, \mathrm{R})$ 〚$\mathrm{B}(a, \mathrm{R})$〛で表わす[*)]．単に球と言ったらそれは閉球のことである．離散距離の場合には，半径が 1 より真に小さい閉球はその中心のみからなる集合であり，半径が 1 以上の閉球は E 全体である．（半径 R が 0 のときは開球は空集合であり，閉球および球面はその中心だけから成る集合である．何も言わなくても，球面や球の半径はつねに有限で真に正 $(\mathrm{R} > 0)$ であるとする）．

距離空間の部分集合がある球（もちろん半径有限の）に含まれるとき，その部分集合は**有界**であると言う．

ノルム線型空間

文字 K は実数体または複素数体を表わすものとし，E を K 上の線型空間とする．E から $\mathbf{R}_+$ への写像 $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$ がつぎの性質を持つとき，これを E 上の**ノルム**と言う[**)]：

$$
(1.4)\qquad
\begin{cases}
1^\circ & \text{正値性}：\vec{x} \neq \vec{0} \text{ ならば } \|\vec{x}\| > 0,\ \|\vec{0}\| = 0. \\
2^\circ & \text{倍写像の効果}：\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\| \qquad (\lambda \in \mathrm{K}). \\
3^\circ & \text{凸不等式}：\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.
\end{cases}
$$

2°，3° から一般の凸不等式

---

*) 高等学校での慣用と異なり，我々は球と球面とを区別する．また，E が平面 $\mathbf{R}^2$ である場合には，球面のかわりに円周または円と言い，球のかわりに円板と言う．

**) 線型空間の元（ベクトル）にはつねに矢印を付けることにする．数の 0 と線型空間の原点 $\vec{0}$ とをはっきり区別するためである．

(1.5) $$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n\| \leqslant \|\vec{x}_1\| + \|\vec{x}_2\| + \cdots + \|\vec{x}_n\|$$

および

(1.6) $$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geqslant |\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,|$$

が出る.

ノルムを備えた線型空間を**ノルム線型空間**または単に**ノルム空間**と言う.

もちろん記号 $\|\ \ \|$ は一旦指定されたそのノルムにしか使えない. 一つの問題にいろいろなノルムが介入する場合には, それぞれ異なる記号を使って区別しなければならない.

ノルム空間 E に距離関数 $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ を入れると, E は距離空間になる. すなわち, ノルム空間はすべて自動的に距離空間でもある. この距離は線型空間の構造に同調する特別な性質を持っている. すなわち, それはまず平行移動によって不変である : $d(\vec{x} - \vec{a}, \vec{y} - \vec{a}) = d(\vec{x}, \vec{y})$. つぎに $\vec{x}$, $\vec{y}$ がそれぞれ λ 倍されれば, 距離は $|\lambda|$ 倍される : $d(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}) = |\lambda| d(\vec{x}, \vec{y})$.

逆に, 線型空間上の距離がこの二つの性質を持てば, それはあるノルムから定まる距離であることが簡単に分る. そのノルムは $\|\vec{x}\| = d(\vec{0}, \vec{x})$ である.

線型空間における半径 R の開球と (中心を指定せずに) 言ったら, それは原点を中心とするものである. 閉球についても同様で, それぞれ $B_0(R)$, $B(R)$ と書く.

とくに中心 $\vec{0}$, 半径 1 の開〖閉〗球を**開〖閉〗単位球**と言う. ただ**単位球**と言ったらそれは閉単位球を意味する.

実または複素線型空間において, 二点 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を端点とする**線分**とは, $0 \leqslant t \leqslant 1$ に対する点 $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ の全体のことである. これを, 順序集合の閉区間と同じ記号 $[\vec{a}, \vec{b}]$ で表わす. E の部分集合の任意の二点を結ぶ線分がまたその集合に含まれるとき, この部分集合を**凸集合**と言う. ノルム空間の場合は, 凸不等式により, 球はすべて凸集合である. 実際, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\| \leqslant R$ ならば,

$$\begin{aligned}\|t\vec{x} + (1-t)\vec{y}\| &\leqslant \|t\vec{x}\| + \|(1-t)\vec{y}\| \\ &= |t|\,\|\vec{x}\| + |1-t|\,\|\vec{y}\| \leqslant (t + (1-t))R = R\end{aligned}$$

となる.

ノルム空間の例を挙げよう.

1° 基礎体 **R** または **C** 上, 関数 $x \longmapsto |x|$ はノルムであり, これから定まる距離はすでに述べたもの (29 ページ, 1°) である. これを**自然ノルム**と言う.

2° 線型空間 $\mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ 上, つぎの三つの関数はどれもノルムである :

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \operatorname*{Max}_{i=1}^{i=n} |x_i|, \ \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \ \Big(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

はじめの二つがノルムであることは明らかだから，最後のものがノルムであることだけ証明しよう． $\mathbf{C}^n$ の二点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して凸不等式

$$(1.7) \qquad \Big(\sum |x_i + y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum |y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

が成立つことを言えばよい．この左辺は $\Big(\sum (|x_i| + |y_i|)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ で押えられるから，両辺の二乗を取って，

$$(1.8) \ \sum (|x_i| + |y_i|)^2 \leqslant \sum |x_i|^2 + \sum |y_i|^2 + 2\Big(\sum |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum |y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

を言えばよい．すなわち，

$$(1.9) \qquad \sum |x_i||y_i| \leqslant \Big(\sum |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum |y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

を言えばよいのであるが，これはコーシー＝シュヴァルツの不等式にほかならない．

このノルム $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}$ を $\mathbf{R}^n$ ないし $\mathbf{C}^n$ の**自然ノルム**と言う．

あとで，無限次元のノルム空間の重要な例に出会うだろう．

§2.　開集合．閉集合．近傍．内部．境界．閉包．密集合

開　集　合

E を距離空間，A をその部分集合とする．A の各点に対し，その点を中心とする開球（半径 >0）が少なくとも一つ A に含まれるとき，A は E の**開部分集合**，略して**開集合**であると言う*⁾．

E の開集合は明らかにつぎの諸性質を持つ：

---

*⁾ A が開集合であるということは，$(\forall x \in \mathrm{A})(\exists \rho > 0)(\forall y \in \mathrm{E},\ d(x, y) < \rho) : y \in \mathrm{A}$ と書かれる．または簡潔に，$(\forall x \in \mathrm{A})(\exists \rho > 0) : \mathrm{B}_0(x, \rho) \subset \mathrm{A}$ とも書かれる．定義の中の《開球》を《閉球》に置換えてもよい．なぜなら，半径 ρ の閉球は半径 ρ の開球を含み，半径 ρ の開球は半径 $\frac{\rho}{2}$ の閉球を含むからである．

(2. 1)
- a) E 自身および空集合 $\varnothing$ は開集合である[*].
- b) 開集合有限個の共通部分は開集合である.
- c) 開集合の合併集合（有限個でも無限個でも）は開集合である.

たとえば b) を証明してみよう. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n$ を E の開集合とする. 点 x がそれらの共通部分に含まれるとすると, 各 i に対して適当な数 $R_i > 0$ を選んで, 球 $B(x, R_i)$ が $\mathcal{O}_i$ に含まれるようにすることができる. $R = \operatorname{Min}_{i=1,2,\cdots,n} (R_i)$ と置けば, 球 $B(x, R)$ は共通部分に含まれる. したがってそれは開集合である.

もう一つ重要な性質, «**ハウスドルフの分離公理**» と呼ばれる性質がある：

d) E の相異なる二点 a, b に対し, a を含む開集合および b を含む開集合で, その共通部分が空集合であるようなものが存在する.

証明. a, b の距離を $d = d(a, b)$ とする, それぞれ a, b を中心とする半径 $\frac{d}{3}$ の開球を取ればよい（開球は開集合である). 実際, もしこの二つに共通な点 c があったとすると, 三角不等式 $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$ によって, $d(a, b) \leqslant \frac{2d}{3}$ となってしまう. 終.

例. 開球はもちろん開集合である. だから «開» 球という名は正当である. とくに, 実数直線 $\mathbf{R}$ を自然距離で考えたとき, その開区間は開集合である. 反対に, 閉区間や半開区間は開集合ではない. これは簡単に分る.

E の部分集合 A が開集合ならば, 定義によってそれは開球の合併集合である. 逆も正しい. なぜなら, 開球は開集合であり, 開集合の合併はまた開集合だから（性質 c)). すなわち, これは A が開集合であるための一つの必要十分条件である.

$\mathbf{R}^n$ に, 32 ページの三つのノルムのどれかによって定まる距離を入れて考える. 真不等式で定義されるつぎの形の集合（a_i, b_i は固定した数）

$$\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) ; a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

を**開方体**と言う. 開方体は開集合である.

---

[*] E の部分集合 A が開集合であるのは, A の各点 x に対し, x を中心とする球で A に含まれるものが存在するときである. $A = \varnothing$ ならば A の点 x は存在しない. したがって要求される性質は充たされ, $\varnothing$ は開集合である. 同じような論理的推論の例をもう一つ挙げよう. 一人の男がその子供達のだれよりも背が高いときに性質（P）を持つと言うことにする. すると, 子供のない男は性質（P）を持つ. 否定の性質の方は, A が非開集合であるのは, A 内に点 x で, x を中心とするどの球も A からはみでるようなものが存在するときである, となる. $\varnothing$ は非開集合ではない. なぜなら $\varnothing$ 内に点はないからである. よって $\varnothing$ は開集合である.

任意の距離空間で，$d(a,\ x)>\mathrm{R}$ なる点 x の全体は開集合である．

離散距離（30 ページ例 4°）に関しては，部分集合はすべて開集合である．

閉　集　合

E の部分集合で，その補集合が開集合であるものを**閉集合**と言う．開集合の性質 a)，b)，c）を補集合に移すことにより，ただちに閉集合に対する同値な条件が出る：

(2.2)
- a′)　E も ∅ も閉集合である．
- b′)　閉集合有限個の合併集合は閉集合である．
- c′)　閉集合の共通部分（有限個でも無限個でも）は閉集合である*)．

ハウスドルフの公理は，閉集合に対してはよい形にならない．

例.　一点から成る集合や有限部分集合は閉集合である．閉球も閉集合であり，その名が正当化される．とくに自然距離を備えた実数直線 **R** において，閉区間はすべて閉集合である．開区間や半開区間は閉集合でない．集合 $\{x\ ;\ d(a,x)\geqslant \mathrm{R}\}$ は閉集合である．球面もすべて閉集合である．

$\mathbf{R}^n$ を 32 ページの三つの距離のうちの一つを備えたものと考えるとき，広義不等式によって定義される集合 $\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ;\ a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ \ i=1, 2, \cdots, n\}$ は閉集合である．これを**閉方体**と言う．

離散距離においては，あらゆる部分集合が閉集合である．

注意.　1°　開集合や閉集合の性質において，我々は共通部分や合併集合が有限個のものであるか任意個のものであるかを注意深く区別した．　この区別は絶対にゆるがせにできない．

たとえば自然距離を備えた実数直線 **R** において，　一点から成る集合は閉じているが，一方それは可算無限個の開集合の共通部分である．　また開区間は閉集合ではないが，それはその区間に真に含まれるような閉区間の可算無限個の合併集合である．

2°　もちろん，開でも閉でもない部分集合も存在する．たとえば **R** の半開区間がそれである．

3°　∅ と E のほかにも，開かつ閉であるような部分集合が存在することもある**)．たとえば離散距離の場合がそうである．

---

*)　定理 15 の系は，部分集合が閉集合かどうかを知るためのもっと実用的なよい判定法を与える．

**)　この問題については §9 を見よ．

近　　傍

E の点 a に対し，a の属する開集合を少なくとも一つ含むような E の部分集合を a の**近傍**と言う（または a を中心とする開球を少なくとも一つ含むと言ってもよい).

点 a の任意の近傍は，a を含むという性質のほか，つぎの三性質を持つ：

(2.3)
- a″) a のある近傍を少なくとも一つ含む部分集合はまた a の近傍である.
- b″) a の近傍の有限個の共通部分は a の近傍である.
- c″) ハウスドルフの分離公理：E の相異なる二点 a, b に対し，a の近傍および b の近傍で共通点を持たないものが存在する.

《近傍》という言葉はややもすれば誤解を招きやすい．点 a の近傍と言うからには a に非常に近いと思えるし，だから集合として小さい方が a の近傍になりやすいようにも思える.

実は全然違う．性質 a″) によれば，まったく反対に集合が大きいほど a の近傍になりやすいのである．全空間 E は a の近傍である．反対に，例外的な場合（離散距離の場合など）を除き，a だけから成る集合は a の近傍ではない.

E の一点 a から成る集合が a の近傍であるとき，すなわちそれが開集合であるとき，a を**孤立点**と言う．離散距離の場合はどの点もみな孤立点である．**R** には孤立点はない.

E の部分集合 A に対し，A を含む開集合を少なくとも一つ含むような部分集合を A の近傍と言う．真に正な実数 $\varepsilon>0$ に対し，A の各点を中心とする半径 ε の球すべての合併集合を A の ε 近傍と言う．これは A の各点を中心とする半径 ε の開球すべての合併集合（これは開集合）を含むから，たしかに A の近傍である.

定理 1.　E の部分集合 A が開集合であるためには，A がその各点の近傍になっていることが必要十分である.

証明.　もし A がその各点の近傍であれば，各点を含む開集合を含み，したがって各点を中心とするある球を含む．よって A は開集合である.

逆に A が開集合ならば，その各点 a に対して A は a を含む開集合，たとえば A 自身を含む．よって A は a の近傍である．　終.

$(\mathscr{V}_i)_{i\in I}$ を a の近傍から成るある族とする．a の任意の近傍が $\mathscr{V}_i$ のうちの少なくとも一つを含むとき，この族を a の近傍の**基本系**と言う．たとえば，距離空間 E に対し，点 a を中心とする開球の全体（または閉球の全体）は a の

近傍の一つの基本系である．　また a を中心とする半径が有理数の球の全体も a の近傍の基本系である．

どの点も，開近傍から成る基本系を持っている．たとえばその点を中心とする開球の全体がそうである．また閉近傍から成る基本系も持っている．たとえばその点を中心とする閉球の全体がそうである．

内　　部

A を距離空間 E の部分集合とする．　A に含まれる開集合すべての合併集合を A の**内部**と言い，$\mathring{\mathrm{A}}$ で表わす．　それは A に含まれる開集合であり (33 ページ性質 c))，そのようなものの中で最大のものである．もちろん $\mathring{\mathrm{A}}$ が空集合のこともある (例．E $=\mathbf{R}$，A $=\mathbf{Q}$，　38 ページ参照)．

定理 2.　　A の内部 $\mathring{\mathrm{A}}$ は，A に含まれる球の中心の全体である．それはまた，E の点で，少なくとも一つの近傍が A に含まれるようなものの全体でもあり，また A を近傍として持つ点の全体でもある．

証明.　　点 a が A に含まれるある開球の中心ならば，　その開球は $\mathring{\mathrm{A}}$ に含まれるから $a\in\mathring{\mathrm{A}}$ となる．逆に $a\in\mathring{\mathrm{A}}$ ならば，$\mathring{\mathrm{A}}$ は開集合だから，a を中心とする球で $\mathring{\mathrm{A}}$ に含まれるものがある．これは当然 A に含まれる．　終．

外　　部

A の補集合の内部を A の**外部**と言う．これは A と共通点のない開集合のうちの最大のものである．それはまた，　A と共通点のない球 (半径 >0) の中心の全体である．A の内部と外部とはもちろん共通点を持たない．

境　　界

A の**境界**とは，　E の点で A の内部にも外部にも属さない点の全体である．これを $\dot{\mathrm{A}}$ と書く．その補集合は開集合 (二つの開集合の合併) だから，境界は閉集合である．

内部，外部の性質から，つぎの定理がただちに出る．

定理 3.　　一点 a が A の境界 $\dot{\mathrm{A}}$ に属するためには，a の任意の近傍が A とも A の補集合とも共通点を持つことが必要十分である．

証明.　　まず，a の任意の近傍が A とも $\complement$A とも共通点を持つということは，その近傍が A にも $\complement$A にも含まれないということだから，　a は A の内部にも外部にも属さ

ない．すなわち a は A の境界に属する．逆に a が A の境界に属するならば，a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ は A と共通点を持つ．なぜなら，もし共通点がなければ $\mathscr{V}$ は $\complement$A に含まれてしまい，a は外部に属してしまう．同様に，$\mathscr{V}$ は $\complement$A とも共通点を持つ．なぜなら，もし共通点がなければ $\mathscr{V}$ は A に含まれてしまい，a は内部に属してしまう．　終．

A の内部，外部，境界はどの二つもたがいに共通点がなく，またそれらの合併は E 全体である．

閉　包

A を含む E の閉集合全部の共通部分を A の**閉包**または**触集合**と言い，$\overline{\mathrm{A}}$ で表わす．これは閉集合であり（34 ページ性質 c′)），また明らかに A を含む閉集合のうちの最小のものである．

A の閉包に属する点を A の**接触点**または**触点**と言う．

定理 4.　A の閉包は A の内部と境界との合併集合である．すなわち A の外部の補集合である．それはまた，E の点で，その任意の近傍が A と交わる（共通点を持つ）ようなものの全体である．

証明.　$\overline{\mathrm{A}}$ は A を含む最小の閉集合だから，補集合に移れば，$\complement\overline{\mathrm{A}}$ は $\complement$A に含まれる最大の開集合，すなわち A の外部である．

つぎに，a が A の触点とする．a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ は A と交わる．なぜなら，もしそうでないとすると，$\mathscr{V}$ は $\complement$A に含まれることになる．a を含み $\mathscr{V}$ に含まれる開集合 $\mathscr{O}$ を取れば $\mathscr{O}$ は $\complement$A に含まれる．よって a は $\complement$A に含まれる開集合全部の合併集合，すなわち A の外部に属することになり，仮定 $a \in \overline{\mathrm{A}}$ に反する．逆に a の任意の近傍が A と交われば，a は A の外部に属さない．なぜなら，もし a が A の外部に属したとすると，A の外部は A と共通点のない a の近傍ということになってしまう．よって a は閉包 $\overline{\mathrm{A}}$ に属する．　終．

したがって，点 a が A の閉包に属するためには，a の任意の近傍が A と交わることが必要十分であることが証明された．

例をいくつか挙げよう．ノルム空間において A が点 a を中心とする半径 R >0 の開球または閉球であるとき，A の内部は開球 $\mathrm{B}_0(a,\ \mathrm{R})$，A の閉包は閉球 $\mathrm{B}(a,\ \mathrm{R})$，A の外部は集合 $\{x\,;\,d(a,\ x)>\mathrm{R}\}$，A の境界は a を中心とする半径 R の球面である*)．［いつでもこういう具合になるわけではない．E が離散距離空間で A が半径 1 の閉球とすると，A は E に一致するからその内部

*)　定理 15 は閉包のもう一つの重要な特徴づけを与える．

は A = E 自身であり，その境界および外部は両方とも空集合である．一方，半径 1 の開球は中心だけから成る集合である．]

実数直線 $\mathbf{R}$ において，A を有理数の全体とすると，$\mathring{A} = \varnothing$，$\dot{A} = \bar{A} = \mathbf{R}$.

E の部分集合 A が開集合であるためには，それがその内部と一致することが必要十分である．

E の部分集合 A が閉集合であるためには，それがその閉包と一致することが必要十分である．

密　集　合

A を距離空間 E の部分集合とする．E のすべての点が A の触点であるとき，すなわち A の閉包が E 全体であるとき，A は E の中で**密**であると言う．言換えれば，任意の開集合が A と交わるということである．距離空間 E が密な可算部分集合を持つとき，E は**密可算**型であると言う[*].

例.　自然距離を備えた $\mathbf{R}$ において，有理数の全体 A，無理数の全体 B はともに $\mathbf{R}$ の中で密である．A は可算集合だから $\mathbf{R}$ は密可算型である．

部分空間．導入距離

F を距離空間 E の部分集合とする．E×E 上で定義されている距離関数を F×F に制限することにより，F は距離空間になる．これを E の**部分距離空間**と言い，その距離は E の距離から《**導入**》されたと言う．

F の部分集合 A についてそれが開集合だとか閉集合だとか言うときには，E の中での話か F の中での話かをはっきりさせなければならない．たとえば F 自身は距離空間 F の中ではつねに開かつ閉であるが，E の中では一般には開でも閉でもない．

定理 5.　F の部分集合が F の中で開集合〚閉集合〛であるためには，それが F と，E の中でのある開集合〚閉集合〛との共通部分であることが必要十分である．

また，F の部分集合が点 $a \in$ F の F の中での近傍であるためには，それが F と，点 a の E の中でのある近傍との共通部分であることが

[*] 分離的という言葉も広く使われている．しかし，分離という言葉は他の重要な概念（ハウスドルフの分離公理）に使われ，しかもいま問題にしている概念はそれとはまったく関係がないので，この訳書では使わない．［訳注］

必要十分である.

証明.　文字 B, β によってそれぞれ E, F の中の球を表わすことにする.

まず F の部分集合 A が F と, E での開集合 A_1 との共通部分であるとする. F の点 a が A に属すれば当然 A_1 にも属するから, A_1 に含まれる球 $B_0(a, R)$ が存在する. F の球 $\beta_0(a, R)=B_0(a, R)\cap F$ は A に含まれるから A は F の開集合である.

逆に A が F の開集合とすると, それは F での開球 $\beta_0(a_i, R_i)$ $(a_i\in A, R_i>0)$ の族 $\{\beta_0(a_i, R_i); i\in I\}$ の合併集合である (33 ページ参照). すると E での開球 $B(a_i, R_i)$ $(i\in I)$ の合併 A_1 は E での開集合であり, $A=A_1\cap F$ となる. 以上で定理のうちの開集合に関する部分は証明された.

つぎに A_1 を E の閉集合とする. C_1 を A_1 の E での補集合とすると, F は共通点のない二つの部分集合 $A=A_1\cap F$, $C=C_1\cap F$ の合併集合である. C は F の開集合だから A は F の閉集合である.

逆に A が F の閉集合のとき, C を A の F での補集合とする. C は F の開集合だから F と, E のある開集合 C_1 との共通部分である. C_1 の E での補集合を A_1 とすれば A_1 は E の閉集合であり, $A_1\cap F$ と $C_1\cap F$ とは F の中でたがいに補集合である. $C=C_1\cap F$ だから $A=A_1\cap F$ となる. 閉集合に関する部分はこれですんだ.

最後に $\mathscr{V}_1$ を点 $a\in F$ の E における近傍とする. $\mathscr{V}_1$ は a を含む E の開集合 A_1 を含む. $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1\cap F$ は点 a を含み, F の開集合 $A=A_1\cap F$ を含む. よって $\mathscr{V}$ は点 a の F での近傍である.

逆に, $\mathscr{V}$ を点 $a\in F$ の F での近傍とすると, $\mathscr{V}$ に含まれる F の開集合 A で点 a を含むものがある. $A=A_1\cap F$ (A_1 は E の開集合) と書ける. $\mathscr{V}_1=A_1\cup\mathscr{V}$ は点 a を含み, E の開集合 A_1 を含むから, a の E での近傍であり, $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1\cap F$ が成立つ.
終.

これからつぎの二つのことが分る.

1° E の開集合, 閉集合, 近傍が分れば, 距離関数を具体的に知らなくても, F の開集合, 閉集合, 近傍が完全に分る. この利点はあとで (§4) 分る.

2° F の部分集合 A が E の中で開いて〚閉じて〛いれば, それは必然的に F の中でも開いて〚閉じて〛いる. A が点 $a\in F$ の E 内での近傍ならば, それは必然的に a の F 内での近傍でもある.

この逆は, 前に A＝F として見たように, 必ずしも成立たない.

定理 6.　a) F が E の開集合である場合, F の部分集合 A が F 内で開集合ならば, それは E 内での開集合でもある.

b) F が E の閉集合である場合, F の部分集合 A が F 内で閉集合ならば, それは E 内での閉集合でもある.

c) F が点 a での E における近傍である場合, a の F における任意

の近傍はまた a の E における近傍でもある.

証明.　a) A を F の開集合とすると，定理 5 によって $A = A_1 \cap F$ となる E の開集合 A_1 が存在する. F は E の開集合だから A も E の開集合である. これからただちに c) も出る.

b) は，a) の証明で «開» を «閉» に置換えればよい.　終.

§ 3.　連続関数. 同相写像

E, F を距離空間，f を E から F への写像とする. f が E の点 a で**連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な $\eta > 0$ を取ると，$d(a, x) \leqslant \eta$ なるかぎり $d(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$ が成立つことである.

つぎのようにも言える. F の点 $f(a)$ を中心とする任意の球 B に対し，点 a を中心とする E の球で，その f による像が B に含まれるものが存在する.

つぎのようにも言える. $f(a)$ の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，a の近傍でその f による像が $\mathscr{V}$ に含まれるものが存在する.

つぎのようにも言える. $f(a)$ の任意の近傍の f による逆像は a の近傍である.

E から F への写像が E の各点で連続なとき，単に**連続**と言う.

連続性の定義のうち，最初の二つは距離が本質的に介入している. しかし，最後の二つには開集合や近傍しか現われず，距離そのものは直接介入していない. これの利点はあとで (§ 4) 分る.

例.　実数直線から原点を除いた距離空間 E から $F = \mathbf{R}$ への写像 $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ はいたるところ連続である.

定理 7.　距離空間 E から距離空間 F への写像 f が連続であるためには，F の開集合の f による逆像がすべて E の開集合であることが必要十分である.

証明.　必要性. f は連続とし，B を F の開集合とする. $A = f^{-1}(B)$ を置き，A の点 a を取る. f は a で連続であり，B は $f(a)$ の近傍であるから，A は a の近傍である. すなわち A はその各点の近傍になっている. よって A は開集合である (定理 1).

十分性. F の開集合の f による逆像がすべて E の開集合であるとする. E の点 a を取り，$f(a)$ の F での近傍 $\mathscr{V}$ を取る. $\mathscr{V}$ は $f(a)$ を含む開球 B を含んでいる. したがって $f^{-1}(\mathscr{V})$ は a を含む開集合 $f^{-1}(B)$ を含み，したがって a の近傍である. よって f は a で連続である.　終.

定理 8.　距離空間 E から距離空間 F への写像 f が連続であるためには，F の閉集合の f による逆像がすべて E の閉集合であることが必要十分である．

証明.　前定理の証明で，現われる開集合を全部その補集合（これは閉集合）で置換えて公式（第 1 章 (2.3)）を使えばよい．

注意.　この二つの定理で，逆像を順像に置換えることはできない．たとえば E から F への定値写像は明らかに連続である．しかし，E の任意の開集合（とくに E 自身も）はこの写像によって F の一点から成る集合に移り，これは一般に開集合ではない．さらに，定理 7 の前の例 $x \mapsto \frac{1}{x}$ を考えると，全空間 E（これは E の閉集合）の像は $F = \mathbf{R}$ から原点を除いたものであり，これは閉集合ではない．

定理 9.　ノルム空間 E の各元にそのノルムを対応させる写像 $E \to \mathbf{R}$（自然距離）は連続である．

証明.　公式 (1.6) によれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\eta = \varepsilon$ とすれば十分である．すなわち $\|x - a\| \leqslant \eta$ ならば $|\|x\| - \|a\|| \leqslant \varepsilon$ となる．　終．

定理 10.　二つの連続写像の合成写像はまた連続である．

証明.　E, F, G を距離空間，f を E から F への写像，g を F から G への写像とし，$h = g \circ f$ をそれらの合成写像とする．さらに f は E の点 a で連続，g は F の点 $b = f(a)$ で連続と仮定する．

$c = g(b) = h(a)$ とし，c の G での近傍 $\mathscr{W}$ を取る．g は b で連続だから，逆像 $\mathscr{V} = g^{-1}(\mathscr{W})$ は b の F での近傍である．f も連続だから，逆像 $\mathscr{U} = f^{-1}(\mathscr{V})$ は a の E での近傍である．$\mathscr{U} = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{W})) = h^{-1}(\mathscr{W})$ だから h は a で連続である[*]．これからすぐ分るように，f，g がともにいたるところ連続ならば h もいたるところ連続である．これは定理 7 または定理 8 から直接導くこともできる．　終．

同 相 写 像

距離空間 E から距離空間 F への**同相写像**（または**位相同型写像**）とは，E から F への連続な双射で，その逆写像も連続なもののことである．

定理 11.　E から F への連続な双射 f が同相写像であるためには，E の開集合の f による順像がすべて F の開集合であることが必要十分である．開集合を閉集合で置換えてもよい．

---

[*] 演習として，連続性の最初の定義（距離を用いるもの）により，$\forall\varepsilon$, $\exists\eta$ 等を使って定理を証明してみるとよい．

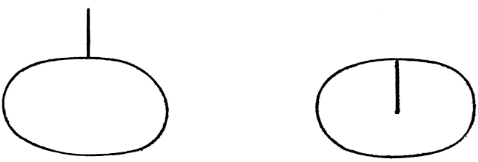
証明.　f による順像はすなわち $g=f^{-1}$ による逆像であり，また定理の条件は，定理7により，f^{-1} の連続性の条件にほかならない．　終．

注意.　連続な双射かならずしも同相写像でないことは注意を要する．たとえば離散距離による実数直線を E，自然距離による実数直線を F とすると E から F への恒等写像は連続な双射である．しかしそれは同相写像ではない．

二つの距離空間 E，F がたがいに**同相**（または**位相同型**）であるとは，一方から他方への同相写像が少なくとも一つ存在することである．この場合，二つの空間の位相的性質はまったく同じである．すなわち，開集合，閉集合，近傍等に関する性質はすべて同じである．

例.　ユークリッド空間における円板の内部と三角形の内部とは同相である．また $\mathbf{R}^2$ において，半平面 $y>0$，放物線 $y=x^2$ の上部 $y>x^2$，下部 $y<x^2$ はどれも同相である*⁾.

下の図に示した二つの距離空間（曲線から枝の出たもの）は同相である：

E  F

しかし，第一の平面全体から第二の平面全体への同相写像で E を F に移すものが存在するわけではない．これは注意を要する．

自然位相による $\mathbf{R}$ と離散位相による $\mathbf{R}$ とは同相でない．後者では部分集合はすべて開集合であるが前者ではそうでない**⁾.

§ 4.　距離空間と位相空間

我々は距離の概念から出発し，距離空間 E 上に開集合，閉集合，内部，外部，境界，閉包，密集合，連続写像などの概念を定義した．これらの概念はすべて開集合の概念をもとにして導き出すことができる．

同じ集合 E 上の二つの異なる距離から定まる開集合の全体が同一であること

---

*⁾　演習として，この各場合に適当な同相写像を見つけよ．

**⁾　上の注意では，後者から前者への恒等写像が同相写像でないことを言ったのであるが，ここでは，いかなる同相写像も存在しないことを言っているので，これは前のよりも強い結果である．

があり得る．するとこの二つに対しては閉集合，各点の近傍等々も同一になる．

たとえば，E を距離空間，d をその距離関数とするとき，$2d$ を新しい距離関数とすることによって，すなわち二点 x，y の距離を $2d(x, y)$ と置くことによって E は別の距離空間になるが，この二つに対する開集合の概念は一致する．

そこで，同じ集合 E 上の二つの距離が同一の開集合を定めるとき，これらはたがいに**同値**であると言う．また，それらは E 上に同一の位相を定めるとも言う．このことは，第一の距離による空間から第二の距離による空間への恒等写像が同相写像であることにほかならない．

一つの線型空間上の二つのノルムは，それらが同値な距離を定めるとき，たがいに**同値**であると言う．

定理 12.　ある線型空間上の二つのノルム $\| \ \|_1$，$\| \ \|_2$ が同値であるためには，下の条件 (4. 1) を充たすような定数 k'，$k'' > 0$ が存在することが必要十分である：

(4. 1)　　$\|\vec{x}\|_2 \leqslant k'\|\vec{x}\|_1$，$\|\vec{x}\|_1 \leqslant k''\|\vec{x}\|_2$　　($\vec{x}$ は E の任意の元).

証明.　第一，第二の距離による，原点を中心とする半径 R の閉球を，それぞれ $\mathrm{B}_1(\mathrm{R})$，$\mathrm{B}_2(\mathrm{R})$ と書くことにする．

まず二つのノルムが同値である，すなわち同じ開集合を定めると仮定する．閉球 $\mathrm{B}_1(1)$ は第一距離による開集合（原点を含むもの）を含むから，第二距離による開集合（原点を含むもの）をも含む．したがって適当な数 $\dfrac{1}{k''}$ を取ると，$\mathrm{B}_1(1) \supset \mathrm{B}_2\left(\dfrac{1}{k''}\right)$ となる．$k''\mathrm{R}$ 倍写像（あらゆるベクトルに $k''\mathrm{R}$ を掛ける写像）を施こすことによって $\mathrm{B}_1(k''\mathrm{R}) \supset \mathrm{B}_2(\mathrm{R})$ を得る．すなわち，$\|\vec{x}\|_2 \leqslant \mathrm{R}$ ならば $\|\vec{x}\|_1 \leqslant k''\mathrm{R}$ となる．$\mathrm{R} = \|\vec{x}\|_2$ としても第一の不等式は成立つから $\|\vec{x}\|_1 \leqslant k''\|\vec{x}\|_2$ となる*)．まったく同様に $\|\vec{x}\|_2 \leqslant k'\|\vec{x}\|_1$ なる k' の存在も証明される．

つぎにこの条件が十分であることを示そう．$\|\vec{x}\|_2 \leqslant \dfrac{\mathrm{R}}{k''}$ ならば $\|\vec{x}\|_1 \leqslant \mathrm{R}$ となるから，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{\mathrm{R}}{k''}\right) \subset \mathrm{B}_1(\mathrm{R})$ が成立つ．したがって第一距離による球はすべて第二距離によるある球を含み，同様に，第二距離による球はすべて第一距離によるある球を含む．これはまず原点を中心とする球について言えるのだが，これを平行移動することにより，任意の点を中心とする球についても言える．ところが，距離から定まる開集合とは，その任意の点

---

*)　別証明．もしこのような k'' が存在しないと仮定すると，あらゆる整数 $n \geqslant 0$ に対し，点 $\vec{x}_n \neq \vec{0}$ で，$\|\vec{x}_n\|_1 \geqslant n\|\vec{x}_n\|_2$ となるものが存在することになる．$\vec{x}_n$ をその $\|\vec{x}_n\|_1^{-1}$ 倍で置換えることにより，$\|x_n\|_2 \leqslant \dfrac{1}{n}$ を得る．すると点列 $\vec{x}_n$ は第二のノルムに関しては $\vec{0}$ に収束するが，第一のノルムに関しては $\vec{0}$ に収束しない．したがってこの二つは同値でない（この証明は点列の収束の概念を使っているが，それはもっと後で出てくる）．

に対し，その点を中心とするある球を含むような集合のことであるから，二つの距離による開集合の概念は一致する．　終．

注意．　d_1，d_2 を二つの同値なノルムから定まる距離とすると，ある数 k を選んで，任意の x，y に対して $d_1(x, y) \leqslant kd_2(x, y)$，$d_2(x, y) \leqslant kd_1(x, y)$ となるようにできるわけである．

これは，線型空間上の同値なノルムから定まる同値な距離のときに限って起る非常に特別な場合である．

これに反し，集合 E 上の任意の距離 d に対し，$d' = \mathrm{Inf}(d, 1)$ と置くと，すなわち $d'(x, y) = \mathrm{Min}(d(x, y), 1)$ と置くと，d' も距離関数であることが簡単に分る（関係（1.1）が成立つことを確めよ）．この二つの距離に関する半径 1 以下の球は同じものだから，d と d' とは同値である．ところが，d が 0 から ∞ までの値を取るとしても，d' は 0 から 1 までの値しか取らない．だから（4.1）の形の不等式は成立たない．E が線型空間で d がノルムによって定まる距離であるとき，d' はしたがってノルムによって定まる距離ではない．上の例からつぎのことが分る：E の任意の距離に対し，それと同値な距離で，それに対しては E が有界になるものが必ず存在する．

系．　はじめに与えた $\mathbf{R}^n$ の三つのノルムはたがいに同値である．

実際，つぎの不等式が成立つ：

$$
(4.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \leqslant \mathop{\mathrm{Max}}_{i=1,2,\cdots,n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Bigl(\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathop{\mathrm{Max}}_{i=1,2,\cdots,n} |x_i| \leqslant \Bigl(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}
$$

もっと一般につぎの定理が成立つが，この定理の証明は難かしいので，証明せずに承認することにする*)．

定理 13．　実数体または複素数体上の有限次元線型空間のノルムはすべてたがいに同値である．したがって，すべてのノルムに共通な，開集合，閉集合等々の概念がちょうど一通り存在する．

あとの例で見るように，この定理は無限次元線型空間に対しては成立たない．

以上で分ったように，距離空間の諸性質を二種類のものに，分けることができる．すなわち，一つは距離的性質で，距離そのものに直接依存する．たとえば二点間の距離とか，三角形の辺の長さとか，球とかいうもの等がそれである．もう一つは位相的性質で，距離そのものには依存せず，距離の定める開集合，閉集合

---

*)　56 ページの定理 25 の証明 b) 参照．

等々のみに依存する*). これを一般化して, 距離の介入なしに位相を導入することが可能である. すなわちつぎのようにする.

集合 E 上に開集合と称する部分集合の族が一つ与えられたとき, E を**位相空間**と言う. この族はまったく任意のもので, ただ 33 ページの性質 a), b), c), d) を持っていればよいのである**). この族を E の**位相**と言う.

距離空間は特別な位相空間であるが, 位相空間には距離から定められないものも存在する. 位相空間に対して, その位相を定めるような距離が存在するとき, その空間には**距離がつく**と言う, 我々の扱う位相空間はほとんどすべて距離が付く.

距離空間に関する, これまでに扱った定義や定理はほとんどすべて一般の位相空間に拡張される. すなわち, 距離を使わないで定義したり証明したりすることができる. しかし, 定理 2, 9, 12, 13 は, 定理そのものが距離を使って述べられているから一般化するわけにはいかない.

任意の点は開集合だけから成る近傍の基本系を持っている (a の任意の近傍は a を含む開集合すなわち a の開近傍を含むから). しかし, 閉集合だけから成る近傍の基本系を持つとは限らない. 任意の点が閉近傍の基本系を持つとき, その空間は**正則**であると言う. 距離の付く位相空間は正則である. 一方, どんな位相空間でも, 一点 a の閉近傍すべての共通部分は a だけである (したがって a の近傍全部の共通部分も a だけである). なぜなら, $b \neq a$ とすると, ハウスドルフの公理により, a, b の開近傍 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ で共通点のないものが存在する. $\overline{\mathscr{A}}$ は a の閉近傍であり, $\mathscr{A} \subset \complement\mathscr{B}$ で $\complement\mathscr{B}$ は閉集合だから $\overline{\mathscr{A}} \subset \complement\mathscr{B}$ となる. すなわち b は $\overline{\mathscr{A}}$ に属さない.

E が位相空間, F がその部分集合であるとき, 定理 5 を逆用して F に位相を導入することができる. すなわち, F の開集合として, E の開集合と F との共通部分を取ることによって F は位相空間になる. この F を E の**部分位相空間**と言

---

*) 距離空間 E の部分集合 A が有界であるという性質 (30 ページの定義参照) は距離的性質であって位相的性質ではない. たとえば 1 以上の整数の全体 $\mathbf{N}_1$ は, 距離 $d(p, q) = |p-q|$ に関しては有界でないが, 距離 $d'(p, q) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|$ に関しては有界であり, しかもこの二つの距離は同値である. しかし, ノルム空間の場合には, 同値なノルムは必ず同じ有界集合を与えることが定理 12 から分る. 44 ページの注意を参照せよ.

) 一般には, 位相には公理 d) は課さない. そして, とくに d) を充たす位相を分離位相**と言う. しかし, 分離的でない位相空間は, 解析学ではごくたまにしか現われず, ほとんど使うことがない. だから, 本書では, 位相空間と言ったら必ず公理 d) を充たす空間を意味するものとする. 非分離空間では, 一点から成る集合は必ずしも閉集合でない. したがって収束点列がたくさんの極限を持つことがあり得る (定理 14 参照)!

い，F の位相を，E からの**導入位相**と言う．

以下，諸定理は可能なかぎり位相空間について述べる．しかし，距離空間の場合に証明が著しく簡単になる場合には，証明の方は距離空間に対してだけ与えることにする．読者はその定理が距離空間だけにしか成立たないと思ってはならない．

補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ の位相　(第1章 16 ページ参照)

$\overline{\mathbf{R}}$ の開集合をつぎのように定めて位相を入れる．$\overline{\mathbf{R}}$ の部分集合 U はつぎの三条件を充たすときに開集合であるとする：

a)　U の点 x が $\mathbf{R}$ に属するならば，x を含むある開区間が U に含まれる．

b)　点 $-\infty$ が U に属するならば，ある区間 $[-\infty,\ A[$ が U に含まれる．

c)　点 $+\infty$ が U に属するならば，ある区間 $]A,\ +\infty]$ が U に含まれる．

こうして定まる開集合の系が位相の四条件を充たすことはすぐ分る．よって $\overline{\mathbf{R}}$ は位相空間になる．さらに，位相空間 $\overline{\mathbf{R}}$ に距離が付くことも簡単に分る．あとでこの位相を定める無限に多くのたがいに同値な距離を与える (77 ページ定理 47)．これらの距離のうちのどの一つも，他のものより自然なものとは言えない．$\mathbf{R}$ は $\overline{\mathbf{R}}$ の部分集合で，$\overline{\mathbf{R}}$ から $\mathbf{R}$ に導入される位相は自然距離から定まる位相である．

§ 5.　点列．極限．収束

位相空間のもっとも大事な性質の一つとして，そこでの点列の収束を云々することができるということがある．

1°　距離空間 E の点列 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ が E の点 l に**収束する**[*] とは，実数列 $d(l,\ x_0),\ d(l,\ x_1),\ \cdots,\ d(l,\ x_n),\ \cdots$ が 0 に収束することである．

つぎのように言ってもよい：任意の $\varepsilon>0$ に対し，適当な整数 n_0 を取ると，n_0 より先の任意の n に対して $d(l,\ x_n)\leqslant\varepsilon$ が成立つ．また，つぎのように言ってもよい：l の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，適当な整数 n_0 を取ると，$n\geqslant n_0$ なる任意の n に対して x_n は $\mathscr{V}$ に属する．

さらにつぎのようにも言える：l の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，有限個を除くあら

---

[*] ここで «n が $+\infty$ になるとき» という句が言外に含まれているのである．x_n がすべて実数の場合，$l=\pm\infty$ も許す．そのときは $\overline{\mathbf{R}}$ の点列として考えているのである．

ゆる n に対して x_n は $\mathscr{V}$ に属する*).

あとの二つの定義は一般の位相空間にも通用する. E が距離空間であっても，点列の収束の概念は位相的性質であって距離的性質ではない.

ほかにもいろいろ，点列以外のものに対する収束の概念がある.

2° たとえば二重数列 $x_{m,n}$ (m, $n \in \mathbf{N}$)，すなわち $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ から E への写像を考えよう.

この二重数列が，m, n が同時に無限大に行くときに E の点 l に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，整数 m_0, n_0 を適当に取ると，$m \geqslant m_0$, $n \geqslant n_0$ なるかぎり，$d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$ となる，ということである**).

3° これとは別に，この二重数列が，m か n かが無限大に行くときに l に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な m_0, n_0 を取ると，$m \geqslant m_0$ または $n \geqslant n_0$ であれば必ず $d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$ となる，ということである***).

4° 実数直線 $\mathbf{R}$ から E への写像 f に対し，«x が a より真に大きい値を取りつつ a に近づくとき，$f(x)$ は l に近づく» というのは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な $\eta > 0$ を取ると，$(|x-a| \leqslant \eta,\ x > a)$ であれば必ず $d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$ となる，ということである.

5° やはり $\mathbf{R}$ から E への写像 f に対し，«x が $+\infty$ に近づくとき，$f(x)$ は l に近づく» というのは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な実数 A を取ると，$x \geqslant \mathrm{A}$ なるかぎり $d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$ となる，ということである.

以上の極限概念はどれも，E が距離空間でなくても，位相空間でありさえすれば定義される. これらの極限概念を包括するものとして，つぎのような一般的な極限の概念を得る. X を位相空間，A を X の部分集合，a を A に接触する X の点とし，さらに f を A から E への写像とする. «x が A の値を取りつつ a に近づくとき，$f(x)$ は l に近づく****)» とは，l の Eでの任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，a の X での適当な近傍 $\mathscr{U}$ を取ると，$f(\mathscr{U} \cap \mathrm{A}) \subset \mathscr{V}$ となるこ

---

*) この定義によれば，点列の収束性は項の順序によらない. 点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n … の順序を変えると，点列 x_{p_0}, x_{p_1}, …, x_{p_n}, … が得られる. ここで $n \mapsto p_n$ は $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ 自身への双射である. はじめの数列が l に収束すれば，順序を変えた数列も l に収束する.

**) 記号で書くと，$(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists m_0 \in \mathbf{N})$ $(\exists n_0 \in \mathbf{N})$ $(\forall m,\ m \geqslant m_0)$ $(\forall n,\ n \geqslant n_0)$: $d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$.

***) 記号的には，$(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists m_0 \in \mathbf{N})$ $(\exists n_0 \in \mathbf{N})$ $(\forall (m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N},\ m \geqslant m_0$ または $n \geqslant n_0)$: $d(x_{m,n}, l) \leqslant \varepsilon$.

****) $a \in \overline{\mathrm{A}}$ であるが，$a \notin \mathrm{A}$ であることが多い，無意識にいつもそう仮定しているほどである. すなわち，x が a に近づく，というとき，$x \neq a$ と思っていることが多い. しかし，ここでは我々はそういう制限はしない. $a \in \mathrm{A}$ のことも，$a \notin \mathrm{A}$ のこともともにありうるとする.

とである．　たとえば 1° では $X = \overline{\mathbf{R}}$, $A = \mathbf{N}$, $a = +\infty$,　4° では $X = \mathbf{R}$, $A = \{x \in \mathbf{R}\ ;\ x > a\}$,　5° では $X = \overline{\mathbf{R}}$, $A = \mathbf{R}$, $a = +\infty$ という具合である．

位相空間 E から位相空間 F への写像 f が E の点 a で連続であるというのは，まさに，x が a に近づくとき $f(x)$ が $f(a)$ に近づくということである．

定理 14.　点列が極限を持てば，それは一つに限る．

証明.　E の点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … が二つの相異なる極限 a, b を持ったとしよう．ハウスドルフの分離公理により，a の近傍 $\mathscr{U}$, b の近傍 $\mathscr{V}$ で共通点のないものが存在する．すると，ある m_0 より先の n については $x_n \in \mathscr{U}$ となり，ある n_0 より先の n については $x_n \in \mathscr{V}$ となる．$n \geqslant \mathrm{Max}(m_0, n_0)$ に対しては $x_n \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ となり矛盾する．　終．

定理 15.　距離の付く空間 E の点 a が E のある部分集合 A の接触点であるためには，A の点列で a に収束するものが存在することが必要十分である*⁾.

証明.　十分性は明らか．実際，このような点列が存在すると，a の任意の近傍はこの列の点を含み，したがって A の点を含むから，a は A に接触する（定理 4）.

逆に a が A の接触点とする．E の位相を定める距離を一つ選び，これに関する，a を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}$ の球を考えると，それは A の点を少なくとも一つ（その一つを x_n と書こう）含む．点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … は A 内にあって a に収束する．

かくして，A の閉包 $\overline{A}$ は，A 内の点列で E の点に収束するものの極限の全体である．

系.　距離の付く空間 E の部分集合 A が閉集合であるためには，E 内で収束する A の点列の極限がすべて A に属することが必要十分である．

定理 16.　距離の付く空間 E から距離の付く空間 F への写像 f が E の点 a で連続であるためには，a に収束する E 内の任意の点列の f による像（これは F の点列）が $f(a)$ に収束することが必要十分である**⁾.

証明.　1°　必要性．f は a で連続とし，点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … が a に収束するとする．$f(a)$ の F での任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，その f による逆像 $\mathscr{U}$ は a の E での近傍である．よって，有限個を除くすべての n について，x_n は $\mathscr{U}$ に属し，したがって $f(x_n)$ は $\mathscr{V}$ に属する．すなわち点列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束する．

2°　十分性．　この条件が充たされているとし，E, F の位相を定める距離を一つずつ選

---

*⁾　E に距離が付けられないときには，この条件は十分であるが必要ではない．

**⁾　E, F が距離の付かない位相空間の場合，この条件は必要であるが十分ではない．

ぶ．f が a で連続でないとすると，ある $\varepsilon>0$ を取ると，どんな $\eta>0$ を取っても，$d(x, a)\leqslant\eta$ なる点 x で，しかも $d(f(x), f(a))>\varepsilon$ となるものが存在する．この ε に対し，$\eta=\dfrac{1}{n}$ と取ることにより，$d(x_n, a)\leqslant\dfrac{1}{n}$, $d(f(x_n), f(a))>\varepsilon$ なる点 x_n が存在する．点列 x_n は a に収束するが，点列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束しない．これは仮定に反する．　終．

§6. 積位相

E_1, E_2 を距離空間，d_1, d_2 をそれぞれの距離関数とする．積集合 $E_1\times E_2$ の上に距離関数 δ をつぎのように定義することができる：

$$(6.1)\qquad \delta((x_1, x_2), (y_1, y_2))=\mathrm{Max}(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

この距離を $\delta=\mathrm{Max}(d_1, d_2)$ と略記する．同様に，d_1+d_2 と略記される距離が，$(d_1+d_2)((x_1, x_2), (y_1, y_2))=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2)$ によって定まり，また，$\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ と略記される距離が，$\sqrt{d_1^2+d_2^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2))=\sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2+(d_2(x_2, y_2))^2}$ によって定まる．このどれも他のものより自然だとか重要だとかいうのではない．実はこれらの距離はみな同値であり，$E_1\times E_2$ に同じ位相を定める．これから分るように，距離空間の積の距離は自然には定まらないので，その一つを選び出すことはあまり興味あることではない．反対に，位相空間の積に自然な位相を定めることは非常に簡単である．以下それを見よう．

E_1 の開集合 A_1 と E_2 の開集合 A_2 との積集合 $A_1\times A_2$ を作る．すなわち，A_1 の点 x_1 と A_2 の点 x_2 との組 (x_1, x_2)（これは $E_1\times E_2$ の元）の全体である*)．$E_1\times E_2$ の部分集合 A が開集合であるとは，A の各点に対し，この点を含む E_1, E_2 の開集合の積が少なくとも一つ A に含まれることである．

こうして定めた開集合が位相の四条件を充たすことはすぐ分る．E_1, E_2 の開集合の積は $E_1\times E_2$ の開集合であるが，積の形でない開集合ももちろんたくさんある．$E_1\times E_2$ のこの位相を，E_1, E_2 の与えられた位相の**積位相**と言う．同様にたくさんの空間の積位相も定義できる（たとえば $E_1=E_2=\cdots=E_n=\mathbf{R}$ の積は，$\mathbf{R}^n$ の自然距離による位相空間になる）．積位相の定義そのものにより，$E_1\times E_2$ から E_1, E_2 への標準射影は連続である．実際 f が $E_1\times E_2$ から E_1 への標準射影のとき，E_1 の開集合 A_1 に対し，逆像 $f^{-1}(A_1)=A_1\times E_2$ は定義によって開集合である．

---

*) $A_1\times A_2$ の形の集合を**開方体**と言うことがある．これは $\mathbf{R}^2$ の直方形からの類推で，辺が各軸に平行な直方形は $\mathbf{R}$ の区間の積集合になっている．

積空間の収束列

定理 17.　$E \times F$ の点列 (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), … が点 (a, b) に積位相に関して収束するためには，E の点列 x_n が a に収束し，F の点列 y_n が b に収束することが必要十分である*).

証明.　まず点列 (x_n, y_n) が (a, b) に収束するとする．射影 $(x, y) \mapsto x$ および $(x, y) \mapsto y$ はともに連続だから，定理 16 により，点列 x_n は a に，点列 y_n は b にそれぞれ収束する．

逆に点列 x_n が a に収束し，点列 y_n が b に収束するとする．(a, b) の $E \times F$ での任意の近傍 $\mathscr{V}$ は (a, b) を含むある開集合を含むから，開集合の定義により，a を含む E のある開集合 A と b を含む F のある開集合との積 $A \times B$ を含む．仮定により，ある n_1 より先の n に対しては $x_n \in A$，ある n_2 より先の n に対しては $y_n \in B$ となる．$n \geqslant \mathrm{Max}(n_1, n_2)$ ならば $(x_n, y_n) \in A \times B \subset \mathscr{V}$ となり，点列 (x_n, y_n) は (a, b) に収束する．　終.

もっと一般に，G をもう一つの位相空間，f を E から F への写像，g を E から G への写像とするとき，E から $F \times G$ への写像 h が，$h(x) = (f(x), g(x))$ によって定まる（第1章 4 ページ参照）．h が連続であるためには，f，g がともに連続であることが必要十分である．証明はやさしい．

多変数の連続関数

二変数の連続関数の概念はすでに知っているはずである．二変数の関数 $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ とは，積空間 $E \times F$ から G への写像のことにほかならない．空間が三つとも位相空間のとき，どういう場合に f が点 (a, b) で連続だと言うのであろうか．

距離空間の場合には，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\eta > 0$ を取ると，$d(x, a) \leqslant \eta$，$d(y, b) \leqslant \eta$ なる限り $d(f(x, y), f(a, b)) \leqslant \varepsilon$ となるときである**).

ところで，これは，$E \times F$ から G への写像 f が積位相に関して (a, b) で連続であるということにほかならない．これが二変数関数の連続性の一般的な概念である．また，$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ から $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ への写像というのは，n 変数関数の m 個の組のことである．

定理 18.　E が距離空間のとき，距離関数 $d: E \times E \to \mathbf{R}$ は連続である．

---

*) 記号を変え，E_1, E_2 のかわりに E, F と書く．添数 1, 2, … は点列の番号に使う．

**) 繁雑を避けるため，E, F, G の距離をみな同じ記号 d で表わした．

証明.　任意の $\varepsilon>0$ に対し，$d(x,\ a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$d(y,\ b)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ なる $x,\ y$ を取れば，$|d(x,\ y)-d(a,\ b)|\leqslant d(x,\ a)+d(y,\ b)\leqslant\varepsilon$ となる．　終．

位相群．位相線型空間

位相群とは，集合 G に群構造と位相とが与えられていて，しかも群構造を定める二つの基本写像，すなわち G×G から G への写像 $(x,\ y)\mapsto xy$ および G から G への写像 $x\mapsto x^{-1}$ がともに連続なもののことである．

位相線型空間とは，集合 E に実数体または複素数体 K 上の線型空間の構造と位相とが与えられていて，二つの基本的な写像，すなわち E×E から E への写像（加法）$(\vec{x},\ \vec{y})\mapsto\vec{x}+\vec{y}$ および K×E から E への写像 $(\lambda,\ \vec{x})\mapsto\lambda\vec{x}$（スカラー乗法）がともに連続なもののことである*)．ただし，K（実数体または複素数体）は自然位相を備えているものとする．

ノルム空間は位相線型空間である．実際，

$$
(6.2)\qquad \begin{cases} \|(\vec{x}+\vec{y})-(\vec{a}+\vec{b})\|\leqslant\|\vec{x}-\vec{a}\|+\|\vec{y}-\vec{b}\| \\ \|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\|\leqslant|\lambda-\alpha|\,\|\vec{x}\|+|\alpha|\,\|\vec{x}-\vec{a}\| \end{cases}
$$

が成立つから，$\|\vec{x}-\vec{a}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$\|\vec{y}-\vec{b}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ ならば $\|(\vec{x}+\vec{y})-(\vec{a}+\vec{b})\|\leqslant\varepsilon$ となり，加法はたしかに連続である．一方，K×E の点列 $(\lambda_n,\ \vec{x}_n)$ が $(\alpha,\ \vec{a})$ に収束すれば，定理 17 により，$\vec{x}_n$ は $\vec{a}$ に収束し，λ_n は α に収束するから，$\|\vec{x}_n-\vec{a}\|$ は 0 に，したがって $|\alpha|\,\|\vec{x}_n-\vec{a}\|$ も 0 に収束し，一方 $|\lambda_n-\alpha|$ は 0 に収束し，$\|\vec{x}_n\|$ は有界だから $|\lambda_n-\alpha|\,\|\vec{x}_n\|$ も 0 に収束する．よって，(6.2) の第二の不等式によって $\lambda_n\vec{x}_n$ は $\alpha\vec{a}$ に収束する．定理 16 により，これはスカラー乗法 $(\lambda,\ \vec{x})\mapsto\lambda\vec{x}$ が K×E から E への連続写像であることを示す．終．

定理 13 はつぎのように一般化される．有限次元の線型空間には，それを位相線型空間にするような位相はただ一つしかない．

二変数関数の偏連続性

f を E×F から G への写像とし，$(a,\ b)$ を E×F の点とする．$x=a$ を固定すると，F から G への関数 $y\mapsto f(a,\ y)$ が（f と a とに依存して）定まる．この関数を，$x=a$ を固定したときの，f の y に関する**偏写像**と言う．これを f_a と書くことにすれば，$f_a(y)=f(a,\ y)$．また，変数 y を省略して $f(a,\quad)$ と書くこともある．この関数 f_a が $y=b$ で連続のとき，関数 f は

*)　加法の連続性は，二つのベクトルの和の極限が，それぞれの極限の和に等しいことを意味する．

点 (a, b) において y に関して**偏連続**であると言う．同様に，$y=b$ を固定したときの，f の x に関する偏写像 $f_b: x \mapsto f(x, b)$ あるいは $f(\ \ , b)$ も定義され，関数 f の，点 (a, b) における x に関する偏連続性も定義される．

これは要するに，f を部分集合 $\{a\}\times\mathrm{F}$ ないし $\mathrm{E}\times\{b\}$ に制限した写像が，点 (a, b) で連続だということにほかならない．f が点 (a, b) でどちらの変数に関しても偏連続であるとき，f は（各変数に関して）**偏連続**であると言う．f が $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ のあらゆる点で偏連続のとき，単に f は**偏連続**であると言う．

連続関数は偏連続であるが逆は成立たない．たとえば，つぎの式で定まる実二変数の関数 f を考えよう：

$$(6.3)\qquad (x, y) \neq (0, 0) \text{ ならば } f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f(0, 0) = 0.$$

この関数は $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合上では連続である．また，x 軸および y 軸上では恒等的に零だから，原点で，したがって全空間で個別的に連続である．しかし原点では連続でない．なぜなら，直線 $y=mx$ 上の原点以外の点での値は $\dfrac{m}{1+m^2}$ であり，$m \neq 0$ ならばそれは 0 ではない．よって，(x, y) が原点に近づいても $f(x, y)$ は 0 に収束しない．

§7. コンパクト空間．基本的性質

E を位相空間とする．E の部分集合の族で，その合併が E 全体になるものを E の**被覆**と言う．ある被覆 $\mathscr{R}$ の部分族 $\mathscr{R}'$ がまた E の被覆であるとき，$\mathscr{R}'$ は $\mathscr{R}$ の**部分被覆**であると言う．被覆が有限族のとき**有限被覆**と言い，開集合だけから成る被覆を**開被覆**と言う．たとえば n が $\mathbf{Z}$ を動くときの開区間 $]n-1, n+1[$ の全体は $\mathbf{R}$ の開被覆である．これは真の部分被覆を持たない．実際，一区間 $]n-1, n+1[$ を除くと，点 n はもう覆われない*)．

定義（**ハイネ＝ボレル＝ルベーグの性質**）．　位相空間 E の任意の開被覆が有限部分被覆を持つとき，E は**コンパクト**であると言う．すなわち，E が何個か（一般に無限個）の開集合の合併になっていれば，実はそのうちの有限個だけの合併にすでになっているというのである．

これまでに扱った位相的性質は，どれも E の部分集合と E 自身との関係を

---

*) 開区間 $]n-\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}[$ の全体も $\mathbf{R}$ の開被覆である．この被覆の一員は前の被覆の一員の部分集合であるが，とにかく異なる集合から成る以上，この被覆を前の被覆の部分被覆とは言わないのである．

表わすものであった（たとえば開集合，閉集合等々）. しかし，コンパクト性は，位相空間それ自身だけに関する性質である. 位相空間 E の部分集合 A がコンパクトだと言ったら，それは E からの導入位相による位相空間として A がコンパクトであることを意味する. これはもちろん E がコンパクトであることを意味しない. E の部分集合 A の閉包がコンパクトのとき，A は（E の中で）**相対コンパクト**であると言う.

E のコンパクト部分集合の有限個の合併はまたコンパクトである.

証明. A_1, A_2, …, A_n を E のコンパクト部分集合とする. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と置き，$\mathscr{R}$ を A の開被覆とする. $\mathscr{R}$ の元（開集合）と A_1 との共通部分の全体は A_1 の開被覆であり，A_1 はコンパクトだから，その中の有限個だけで A_1 は覆われる. A_2, …, A_n についても同様だから，その全部を集めることによって A の有限開部分被覆が得られる. したがって A はコンパクトである.　終.

同様に，E の相対コンパクト部分集合の有限個の合併はまた相対コンパクトである.

例. 有限個しか点のない空間はコンパクトである. 実数直線 $\mathbf{R}$, 空間 $\mathbf{R}^n$, 有限または無限次元のノルム空間はどれもコンパクトでない. 実際，原点を中心とする開球の全体は開被覆を成すが，その中からどんな有限個を取ってきても，それらは一個の球（半径最大のもの）に含まれてしまい，全空間を覆わない. もっと一般に，距離空間の有界でない部分集合，すなわち有限半径の一つの球に含まれない部分集合は決してコンパクトにならない.

定理 19. 実数直線 $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明. $\mathscr{R}$ が $[a, b]$ の開被覆だとする. $[a, b]$ の中点を c としよう. もしも $\mathscr{R}$ の中のどの有限個によっても $[a, b]$ が覆われないとすると，$[a, b]$ の二つの部分区間 $[a, c]$, $[c, b]$ のうちの少なくとも一方は，やはり $\mathscr{R}$ のどの有限個によっても覆われないはずである. その部分区間を $[a_1, b_1]$ と書く. 同じ手続きを $[a_1, b_1]$ に適用して，やはり《覆われない》，しかも幅四分の一の区間 $[a_2, b_2]$ が得られる. この手続きを繰返して，《覆われない》区間の無限列 $[a_0, b_0]=[a, b]$, $[a_1, b_1]$, …, $[a_n, b_n]$, … ができる. この中のどの区間も，$\mathscr{R}$ に属する有限個の開集合では覆われない.

さて，増大数列 a_n は上有界だから極限 α を持ち，同様に数列 b_n は極限 β を持つ. $[a_n, b_n]$ の幅は $\dfrac{b-a}{2^n}$ だから $\alpha=\beta$ でなければならない. 点列の収束の定義により，点 $\alpha=\beta$ の任意の近傍は，十分大きな n に対しては区間 $[a_n, b_n]$ を含む.

一方 $\mathscr{R}$ は $[a, b]$ の被覆だから，点 $\alpha=\beta$ を含む $\mathscr{R}$ の元 $\mathscr{O}$ が存在する. $\mathscr{O}$ は開集

合だから，点 $\alpha=\beta$ を含むある開区間 $]a', b'[$ を含む．したがって $\mathcal{O}$ は十分大きな n に対する $[a_n, b_n]$ を含む．これは不合理である．なぜなら，$[a_n, b_n]$ は $\mathcal{R}$ のどんな有限個によっても覆われないはずなのに，一方その中のたった一個，すなわち $\mathcal{O}$ によって覆われているからである．よって $[a, b]$ はコンパクトである．　終．

一般に，空間 $\mathbf{R}^n$ において，有界な閉方体，すなわち，$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1$，$a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2$，…，$a_m \leqslant x_m \leqslant b_m$ $(a_i, b_i \in \mathbf{R})$ を充たすような点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ の全体はコンパクトである．証明は前定理と同様である．ただ，区間を二等分するかわりに，方体を 2^m 個の小方体（各辺を二等分したもの）に等分すればよいのである．

定理 20.　補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ はその自然位相に関してコンパクトである．

証明.　$\mathcal{R}$ を $\overline{\mathbf{R}}$ の開被覆とする．点 $-\infty$ は $\mathcal{R}$ に属するある開集合 $\mathcal{O}_-$ に属し，$+\infty$ も $\mathcal{R}$ に属するある開集合 $\mathcal{O}_+$ に属する．$\mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_-$ の $\mathbf{R}$ における補集合は，$\mathbf{R}$ の十分大きなある有界閉区間 $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ に含まれる．$\mathcal{R}$ は $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ を覆い，$[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ はコンパクトだから，定理 19 により，$[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ は $\mathcal{R}$ の中の有限個によって覆われる．これに $\mathcal{O}_+$ と $\mathcal{O}_-$ とを付加えた有限族は $\overline{\mathbf{R}}$ 全体を覆う．　終．

注意.　1°　コンパクト空間の定義から，とくにつぎの性質が導かれる：Eをコンパクト空間，$\mathcal{O}_0$，$\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$，…，$\mathcal{O}_n$，… を E の開集合の増大列で，その合併が E になるものとすると，ある n に対する $\mathcal{O}_n$ がすでに E 全体に一致する．

2°　二つの位相空間がたがいに同相で，一方がコンパクトならばもう一方もコンパクトである．したがって $\mathbf{R}$ と $\overline{\mathbf{R}}$ とは同相でない（すなわち同相写像が存在しない）．同様に，$\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ は $\mathbf{R}$ と同相でない．一方，$\mathbf{R}$ の開区間は $\mathbf{R}$ と同相である．たとえば，写像 $x \mapsto \tan x$ は開区間 $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ から $\mathbf{R}$ への同相写像である．二つの位相空間が同相でないことを判定する方法は貴重である．実際，二つの空間が同相であることを示すためには同相写像を一つ作ればよく，それは普通難かしくない．これに反し二つの空間が同相でないことを証明するのは一般に難かしい．

定理 21.　位相空間 E がコンパクトであるためには，E の閉集合の族で，その共通部分が空集合であるものに対し，その中の有限個を選んで共通部分が空集合になるようにできることが必要十分である．

証明.　コンパクト空間の定義を，補集合の言葉で言換えればよい．すなわち，合併集合を共通部分に，開集合を閉集合に，全空間を空集合にする．　終．

系 1.　E をコンパクト空間，F_0，F_1，F_2，…，F_n，… を E の閉集合の減小列で，その共通部分が空集合であるものとすると，ある n に対す

る F_n がすでに空集合である．

この性質が $\mathbf{R}$ に対して成立たないことは明らかで，これからも $\mathbf{R}$ がコンパクトでないことが分る．実際，閉区間 $[n, +\infty[$ の列は条件を充たすが，そのどの一つも空集合でない．

注意． 第1章の定理 11 を使うと，いまの系 1 がつぎの系 2 に同値であることが分る．

系 2． E をコンパクト空間，F_0，F_1，…，F_n，… を E の閉集合の減小列で，どの一つも空集合でないものとすると，それらの共通部分は空集合でない．

定理 22． 位相空間 E のコンパクト部分集合 F は E の閉集合である*)．

証明． 簡単のため，E が距離空間のときに証明する．a を F の接触点として，$a \in F$ を証明すればよい．a を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}$ (n は整数 $\geqslant 1$) の閉球と F との共通部分を F_n とする．列 F_n は F の閉集合の減小列で，どの一つも空集合でない (a は F の接触点だから，定理 4 による)．仮定によって F はコンパクトだから，F_n 全部の共通部分は空でない．ところが，半径 $\dfrac{1}{n}$ の球全部の共通点はその中心 a だけだから，F_n 全部の共通点も a 以外にはあり得ない．よって a は F_n に，したがって F に属する．　終．

この定理の逆は成立たない．任意の位相空間の閉部分集合は必ずしもコンパクトでない．実際，空間全体は閉集合なのだから．しかし，つぎの定理が成立つ．

定理 23． コンパクト空間の閉部分集合はまたコンパクトである．

証明． E をコンパクト空間，F を E の閉集合とする．$(F_i)_{i \in I}$ を F の閉集合の族で，その共通部分が空であるものとする．F_i は F で閉，F は E で閉だから F_i は E の閉集合である（定理 6, b)）．E はコンパクトだから，有限個の F_i がすでに共通点を持たない．したがって定理 21 によって F はコンパクトである．　終．

定理 22 と定理 23 とにより，コンパクト空間では，コンパクト部分集合と閉部分集合とは同じものである．とくに補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ の部分集合がコンパクトであるのは，それが $\overline{\mathbf{R}}$ の閉集合である場合である．

定理 24． コンパクト空間はすべて正則である．すなわち，各点に対し

---

*) 注目せよ！この定理は部分集合の内在的性質，すなわち（導入位相に関して）コンパクトだという性質と，その部分集合と全空間との相関的性質，すなわち閉じているという性質とを比較し，結び合わせるものである．

てコンパクト近傍の基本系が存在する.

証明.　$\mathscr{V}$ を a の任意の近傍とし, $\mathring{\mathscr{V}}$ を $\mathscr{V}$ の内部とする.　$\mathrm{K} = \complement \mathring{\mathscr{V}}$ (補集合) は閉集合だから定理 23 によってコンパクトである. $\mathscr{W}$ を a の閉近傍すなわちコンパクト近傍とすると, $\mathscr{W} \cap \mathrm{K}$ は K の閉集合である. $\mathscr{W}$ が a のコンパクト近傍全部を動くと, $\mathscr{W} \cap \mathrm{K}$ の全体は共通点を持たない.　なぜなら, $\mathscr{W}$ 全部の共通点が a だけであり (45 ページ), a は K に属さないからである. K はコンパクトだから, a のコンパクト近傍有限個 $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{W}_2$, …, $\mathscr{W}_n$ を適当に選ぶと, $\bigcap_{i=1}^{i=n} (\mathscr{W}_i \cap \mathrm{K}) = \emptyset$ となる. $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2 \cap \cdots \cap \mathscr{W}_n$ は a のコンパクト近傍で, $\mathscr{W}_0 \cap \mathrm{K}$ は空集合であり, したがって $\mathscr{W}_0 \subset \mathring{\mathscr{V}}$ である.　かくして, a の任意の近傍は a のあるコンパクト近傍を含む, すなわち空間は正則である.
終.

もっと一般に, コンパクト空間の任意のコンパクト部分集合は, コンパクト近傍の基本系を持つ. 証明は上と同様である.

定理 25.　有限次元ノルム空間 E の部分集合がコンパクトであるのは, それが有界閉集合である場合である.

証明.　1° 必要性. コンパクト部分集合は, はじめに見たように有界であり, しかも定理 22 によって閉集合である.

2° 十分性. 基礎体が $\mathbf{C}$ のときには, n 次元線型空間を $\mathbf{R}$ 上の $2n$ 次元線型空間とみなすことにし, 以下基礎体は $\mathbf{R}$ とする.

a)　$\mathrm{E} = \mathbf{R}^n$ で, ノルムが関数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \operatorname*{Max}_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|$ で与えられる場合.

有界集合はある閉球, すなわちこの場合にはある有界閉方体に含まれる. よってあるコンパクト集合に含まれる.　問題の部分集合は閉集合だから, それはコンパクト空間の閉部分集合であり, したがって定理 23 によってコンパクトである. (もっと一般に, 閉球がすべてコンパクトであるような距離空間では, 有界閉集合はみなコンパクトである).

b)　$\mathbf{R}$ 上の任意の n 次元ノルム空間の場合.

まず, 前に定理 13 として承認したことを証明しよう.　E の基底 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ を選ぶと, 点 $\vec{x}$ はその座標 x_1, x_2, …, x_n によって表わされる.　E 上に与えられているノルムを $\|\vec{x}\|$ と書く.　もう一つのノルムを $|\vec{x}| = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|$ によって定める.　まず, $\|\vec{x}\| = \|\sum x_i \vec{e}_i\| \leqslant \sum |x_i| \|\vec{e}_i\| \leqslant \sum_i \|e_i\| \cdot \operatorname*{Max}_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|$ が成立つから,　$k = \sum_i \|\vec{e}_i\|$ と置くと, 不等式

$$\|\vec{x}\| \leqslant k|\vec{x}| \tag{7.1}$$

が得られる.

つぎに逆向きの不等式 (k' を適当に選んでの) を証明しよう.　不等式 (7.1) は, ノルム $|\vec{x}|$ を備えた空間 E から, ノルム $\|\vec{x}\|$ を備えた空間 E への恒等写像が連続であるこ

とを示している（実際，$\|\vec{x}-\vec{a}\| \leqslant k|\vec{x}-\vec{a}|$ だから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\eta=\dfrac{\varepsilon}{k}$ と選べば，$|\vec{x}-\vec{a}| \leqslant \eta$ なるかぎり $\|\vec{x}-\vec{a}\| \leqslant \varepsilon$ となる．これは点 $\vec{a}$ での連続性の定義そのものである）．ところが，連続写像による閉集合の逆像は閉集合である（定理 8）から，E の部分集合 F が距離 $\|\ \|$ に関して閉じていれば距離 $|\ |$ に関しても閉じている．とくに，$\|\ \|$ に関する閉球 $\|\vec{x}\| \leqslant R$ は距離 $|\ |$ に関しても閉じている．$|\ |$ に関する球面 $|x|=1$ を Q で表わそう．Q は E の距離 $|\ |$ に関する有界閉集合だから，証明の a）で示したように，コンパクトである．$\|\ \|$ に関する閉球（したがって $|\ |$ に関する閉集合）$\|\vec{x}\| \leqslant R$ と Q との共通部分を F_R とすると，F_R は（$|\ |$ に関して）コンパクト空間 Q の閉集合である．球 $\|\vec{x}\| \leqslant R$ 全部の共通点は原点だけであり，原点は Q に属さないから，F_R 全部の共通部分は空集合である．定理 21 により，そのうちの有限個がすでに共通点を持たない．これら有限個の球の半径の最小値を $\rho>0$ とすると，球 $\|\vec{x}\| \leqslant \rho$ は Q と交わらない．したがって，$\|\vec{x}\| \leqslant \rho$ ならば $|\vec{x}|<1$ である．なぜなら，もし $\|\vec{x}_0\| \leqslant \rho$, $|\vec{x}_0| \geqslant 1$ なる $\vec{x}_0$ が存在したとすると，$\lambda=\dfrac{1}{|\vec{x}_0|} \leqslant 1$ と置くとき，$\|\lambda\vec{x}_0\| \leqslant \lambda\rho \leqslant \rho$ かつ $|\lambda\vec{x}_0|=1$ となり，$\lambda\vec{x}_0$ は球 $\|\vec{x}\| \leqslant \rho$ と Q との共通点になってしまうからである．したがって任意の μ に対し，$\|\vec{x}\| \leqslant \mu\rho$ ならば $|\vec{x}|<\mu$ となる．最初の不等式は $\mu=\dfrac{\|\vec{x}\|}{\rho}$ に対して成立つから，第二の不等式として，

$$|\vec{x}| \leqslant \frac{1}{\rho}\|\vec{x}\| \tag{7.2}$$

が得られた．これと（7.1）とを合わせて，二つのノルム $|\ |$, $\|\ \|$ がたがいに同値であることが分った．すなわち定理 13 が証明された．

これで定理はすべての場合に証明されたことになる．なぜなら，二つの同値なノルムに対しては，《閉集合，有界，コンパクト》等の概念は同一であり（45 ページの脚注参照），特別なノルムについては a）ですでに証明されているから，任意のノルム（それがはじめの特別なノルムに同値だというのがいま証明した定理 13 である）についても証明されたわけである．　終．

局所コンパクト空間

位相空間 E の各点が少なくとも一つのコンパクト近傍を持つとき，E は**局所コンパクト**であると言う．

有限次元ノルム空間はすべて局所コンパクトである．実際，閉球はみなコンパクトだから．反対に，無限次元ノルム空間は決して局所コンパクトにならないことが証明される（定理 55）．そこでは閉球もコンパクトでないのである．かくして，ノルム空間の部分集合がコンパクトならばそれは有界閉集合であるが，逆は成立たないのである．

二つの位相空間がたがいに同相で，一方が局所コンパクトならば，もう一方も

局所コンパクトである．コンパクト性のときと同様 (54 ページ)，この事実は，二つの位相空間が同相でないことを示す方法として役立つ．たとえば，有限次元ノルム空間と無限次元ノルム空間とは決して同相にならない．

局所コンパクト空間はどれも正則であり，その各点はコンパクト近傍の基本系を持つ．実際，$\mathscr{V}$ を a のコンパクト近傍とすると，定理 24 により，a は $\mathscr{V}$ 内でのコンパクト近傍の基本系を持つ．ところが a の $\mathscr{V}$ における近傍はどれも全空間における近傍でもある (定理 6，c))．　終．

もっと一般に，局所コンパクト空間の任意のコンパクト部分集合は，コンパクト近傍の基本系を持つ．

点 列 の 集 積 点

x_0, x_1, x_2, …, x_n, … を位相空間 E の点列とする．E の点 a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対して，無限個の n の値に対する x_n が $\mathscr{V}$ に属するとき，a を E の**集積点**[*] と言う．点列が a に収束すれば，a はその点列の集積点である．

定理 26.　距離の付く空間 E の点 a が E の点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … の集積点であるためには，その点列の部分列で a に収束するものが存在することが必要十分である．

証明.　点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … の部分列とは，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への真増加写像 $p: n \longmapsto p_n$ に対してできる点列 x_{p_0}, x_{p_1}, …, x_{p_n}, … のことである[**]．

さて，a に収束する部分列が存在すれば，集積点の定義そのものにより，a はもとの点列の集積点となる（これは E が必ずしも距離の付かない一般の位相空間の場合にも正しい）．

逆を証明しよう．位相を定める距離を一つ選んでおき，a を点列の集積点とする．すると，半径 $\frac{1}{n}$ の球に対し，$x_p \in \mathrm{B}\left(a, \frac{1}{n}\right)$ となる p が無限に多く存在する．まず $n=1$ に対して p_1 を選び，$n=2$ に対しては $p_1 < p_2$ なる p_2 を選ぶ（もちろん $x_{p_1} \in \mathrm{B}(a, 1)$, $x_{p_2} \in \mathrm{B}\left(a, \frac{1}{2}\right)$）．$n=3$ に対しては $p_2 < p_3$ なる p_3（$x_{p_3} \in \mathrm{B}\left(a, \frac{1}{3}\right)$ なるもの）を選ぶ．この操作を続けることによって部分列 $n \longmapsto x_{p_n}$ が得られ，これは確かに a に収束する．　終．

定理 27（ヴァイエルシュトラス=ボルツァノの性質）．　距離の付く空間 E がコンパクトであるためには，E の任意の点列が少なくとも一つの集

---

*)　点列の接触点と言うこともある．しかし，この言葉は部分集合の接触点と混同を起すおそれがあるので，本書では別の言葉を使う．

**)　とくに $p_n = n$ に取れるから，もとの点列自身も部分列の一つである．

積点を持つことが必要十分である*).

証明. 1° E がコンパクトだと仮定し，x_0, x_1, …, x_n, … を E の点列とする．集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ を A_n と書き，その閉包を $\overline{A}_n$ と書く．すると $\overline{A}_n$ の全体は閉集合の減小列を作り，そのおのおのは空でない．よってそれら全部の共通部分も空でない．その共通点の一つを a とすると，a はどの $\overline{A}_n$ にも接触している．すなわち a の任意の近傍はどの A_n とも交わる．したがって a はもとの点列の集積点である．

2° 逆は難かしい．まず二つの補題を証明する．

補題 1. E を距離空間とし，その任意の点列が集積点を少なくとも一つ持つと仮定する．すると，E の任意の開被覆 $\mathscr{R}$ に対し，つぎの性質を持つ数 $\varepsilon>0$ が存在する：半径が ε 以下の（任意の点を中心とする）球はすべて $\mathscr{R}$ のある開集合に含まれる．

証明. ある開被覆 $\mathscr{R}$ に対してこの主張が成立たないと仮定しよう．すると任意の n に対し，ある点 a_n を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}$ の球で，$\mathscr{R}$ のどの開集合にも含まれないものが存在する．こうして E の点列 a_1, a_2, …, a_n, … ができるが，仮定によってこの点列は少なくとも一つの集積点 a を持つ．a は $\mathscr{R}$ に属するある開集合 $\mathscr{O}$ に含まれる．一方 $\mathscr{O}$ は a を中心とする半径 $\alpha>0$ の球を含む．$\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$, $d(a_n, a)\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$ となるような n は無限に多く存在するから，その一つの n を取る．a_n を中心とする半径 $\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$ の球は，球 $B(a, \alpha)$ に含まれる（なぜなら，$x\in B\left(a_n, \dfrac{1}{n}\right)$ に対し，$d(x, a)\leqslant d(x, a_n)+d(a_n, a)\leqslant\dfrac{1}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\alpha$）．したがってそれは $\mathscr{O}$ に含まれることになり，これは a_n の選びかたに反する．　終．

補題 2. E を距離空間とし，その任意の点列が集積点を少なくとも一つ持つと仮定する．すると，任意の $\varepsilon>0$ に対し，半径 ε の球から成る E の有限開被覆が存在する．

証明. E の任意の点 a_0 を取る．もし $B_0(a_0, \varepsilon)=E$ ならばすでに補題は証明された．そうでないときは，$B_0(a_0, \varepsilon)$ に属さない一点 a_1 を取る．$B_0(a_0, \varepsilon)\cup B_0(a_1, \varepsilon)=E$ ならばこれで終る．そうでなければまた続ける．こうして半径 ε の開球の列 $B_0(a_0, \varepsilon)$, $B_0(a_1, \varepsilon)$, …, $B_0(a_n, \varepsilon)$, … ができる．この操作が有限回で終りになれば，すなわちある有限回までの開球の合併が E 全体になれば補題は証明されたことになる．かりにこの操作がどこまで行っても終らなかったと仮定しよう．すると，無限点列 a_0, a_1, a_2, …, a_n, … ができるが，この点相互間の距離はどれも ε 以上である．一方，仮定により，この点列は少なくとも一つの集積点 a を持つ．すると，無限に多くの n について $d(a, a_n)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$ だから，とくに二つの相異なる数 p, q について $d(a, a_p)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$, $d(a, a_q)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$ となる．よって $d(a_p, a_q)\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{3}$ となり，$d(a_p, a_q)\geqslant\varepsilon$ に反する．　終．

---

*) E に距離が付かないとき，条件は必要であるが十分ではない．

定理の証明の続き．ここまで来ればやさしい．E の位相を定める距離を一つ選び，$\mathscr{R}$ を E の任意の開被覆とする．補題 1 により，ある $\varepsilon>0$ を取ると，半径が ε 以下の任意の球は $\mathscr{R}$ に属するある開集合に含まれる．一方，補題 2 により，半径 ε の開球 B_0, B_1, B_2, …, B_n による E の有限開被覆が存在する．各 B_i は $\mathscr{R}$ のある元 $\mathscr{O}_i$ に含まれるから，有限族 $\mathscr{O}_0$, $\mathscr{O}_1$, $\mathscr{O}_2$, …, $\mathscr{O}_n$ は $\mathscr{R}$ の部分開被覆である．よって E はコンパクトである．　終．

注意 1.　補題 1, 2 はいずれもコンパクト距離空間の性質であることが分る*)．

注意 2.　ヴァイエルシュトラス=ボルツァノの定理は，実数直線 $\mathbf{R}$ に対してはもちろん成立たない．実際，正整数の列 0, 1, 2, … は集積点を持たない．これに対し，$\overline{\mathbf{R}}$（これはコンパクト）では，この列は $+\infty$ に収束する．

定理 28.　二つのコンパクト空間の積空間は，積位相に関してコンパクトである．

証明.　コンパクト距離空間の場合にだけ証明する．E, F をそのような空間とし，E×F の点列 (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), … を考える．定理 27 により，E の点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … は少なくとも一つの集積点 a を持つ．つぎに定理 26 により，a に収束する部分列 x_{p_0}, x_{p_1}, x_{p_2}, …, x_{p_n}, … が存在する．対応する F の点列 y_{p_0}, y_{p_1}, y_{p_2}, …, y_{p_n}, … は集積点 b を持つから，ふたたび定理 26 により，b に収束する部分列 $y_{p_{q_0}}$, $y_{p_{q_1}}$, $y_{p_{q_2}}$, …, $y_{p_{q_n}}$, … が存在する．E×F の点列 $(x_{p_{q_0}}, y_{p_{q_0}})$, …, $(x_{p_{q_n}}, y_{p_{q_n}})$, … はもとの点列の部分列であり，しかも点 (a, b) に収束する．したがってもとの点列は集積点を持ち，したがって E×F はコンパクトである．　終．

定理 29.　コンパクト空間 E の点列が点 a に収束するためには，a がその点列のただ一つの集積点であることが必要十分である．

証明.　必要性は明白である．実際，点列が a に収束すれば a は集積点である．a と異なる b は集積点になり得ない．なぜなら，a の近傍 $\mathscr{U}$ および b の近傍 $\mathscr{V}$ で，共通点のないものが存在し，しかも有限個を除くすべての n に対する x_n は $\mathscr{U}$ に属するから，$\mathscr{V}$ に属する x_n は有限個しかない．よって b は集積点でない．

十分性を証明しよう．点 a が点列 x_0, x_1, x_2, …, x_n, … のただ一つの集積点だとする．もしこの点列が a に収束しないとすると，a の適当な開近傍 $\mathscr{O}$ を取ると，無限個の n に対する x_n が $\mathscr{O}$ 外にある，すなわち，$\mathscr{O}$ 外の元だけから成る部分列 x_{p_n} が存在する．$\mathscr{O}$ の補集合は閉集合だから，定理 23 によってコンパクトである．したがって点列 x_{p_n} は $\complement\mathscr{O}$ の中に少なくとも一つの集積点を持つ．これはもとの点列の集積点でもある

---

*) «compact» というフランス語は，Larousse の辞引によれば，«serré, pressé»（ぎっしり詰った，密集した）という意味である．補題 2 によれば，それはどんなに小さい半径の球によってでも，有限個だけで全体が覆われるのだから，たしかに非常に密集しているわけである．

から，《ただ一つの集積点》という仮定に反する．　終．

注意．　この主張は $\mathbf{R}$ に対してはもちろん成立たない．たとえば，点列 1，1，2，$\frac{1}{2}$，3，$\frac{1}{3}$，…，n，$\frac{1}{n}$，… は 0 をただ一つの集積点として持つが，収束しないことは明らかである．

実数列の上極限と下極限

x_0，x_1，x_2，…，x_n，… を $\overline{\mathbf{R}}$ の点列とする．$\overline{\mathbf{R}}$ はコンパクトだから，この点列の集積点の全体 F は空集合ではない．F は閉集合である．なぜなら，$\mathrm{A}_n=\{x_n,\ x_{n+1},\ \cdots\}$ とすると，F は閉集合 $\overline{\mathrm{A}}_n$ すべての共通部分だからである（59 ページ参照）．よって F はコンパクト集合であり，最大値 L および最小値 l を持つ．L をこの点列の**上極限**，l を**下極限**と言い，それぞれ $\mathrm{L}=\limsup_{n\to\infty} x_n$，$l=\liminf_{n\to\infty} x_n$ と書く．上極限はつぎの性質によって特徴づけられる：$\mathrm{L}_1<\mathrm{L}<\mathrm{L}_2$ なる任意の L_1，L_2 に対し，有限個を除くすべての n に対する x_n が L_2 以下であり，無限個の n に対する x_n が L_1 以上である．

上極限と上限とを混同してはならない．たとえば，点列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，… の上限は 1 であるが上極限は 0 である（実際，この数列は 0 に収束するから，0 がただ一つの集積点である）．

$\overline{\mathbf{R}}$ の点列が収束するためには，その上極限と下極限とが一致することが必要十分である（ただ一つの集積点を持つことになる）．

§ 8.　コンパクト空間上の連続関数の性質

定理 30.　連続写像によるコンパクト集合の順像はコンパクトである．

証明．　E，F を位相空間，f を E から F への写像とし，E はコンパクトであると仮定する．もちろん，F 自身のコンパクト性が問題なのではない．証明すべきことは，E の f による順像 $f(\mathrm{E})$ が，F からの導入位相による F の部分位相空間としてコンパクトだ，ということである．$\mathscr{R}$ を $f(\mathrm{E})$ の開被覆とする．$\mathscr{R}$ に属する開集合 $\mathcal{O}_i$ の逆像 $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ の全体は E の開被覆となる．実際，E の任意の点 x に対し，$f(x)$ はある $\mathcal{O}_i$ に属すから，x は $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ に属す．すなわち，$f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ の全体は E を覆う．つぎに f を E から $f(\mathrm{E})$ への写像と考えても連続であるから，$f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ は開集合である．すなわち $f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ の全体は E の開被覆である．

いま E はコンパクトだから，$f^{-1}(\mathcal{O}_i)$ のうちの有限個，$f^{-1}(\mathcal{O}_1)$，$f^{-1}(\mathcal{O}_2)$，…，$f^{-1}(\mathcal{O}_n)$ だけですでに E は覆われる．すると，$\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$，…，$\mathcal{O}_n$ は $f(\mathrm{E})$ の開被覆となる．実際，

$f(\mathrm{E})$ の任意の点 y に対し，$f^{-1}(\{y\})$ は空集合でないから，その任意の点 x を取ると，x はある $f^{-1}(\mathcal{O}_k)$ に属する．したがって $y=f(x)$ は $\mathcal{O}_k$ に属する．すなわち，$f(\mathrm{E})$ の任意の開被覆から有限部分開被覆が選べた．　終．

系.　コンパクト空間 E から位相空間 F への連続な双射はすべて同相写像である．

証明.　E の任意の閉集合は定理 23 によってコンパクト，したがってその順像はいま証明した定理によってコンパクト，したがって定理 22 によって F の閉集合である．定理 11 によれば，閉集合の順像がすべて閉集合であるような連続双射は同相写像である．　終．

注意.　連続写像によるコンパクト集合の逆像は必ずしもコンパクトではない．たとえばコンパクトでない空間 E から任意の空間 F への定値写像 f を考えると，E の f による順像は F の一点 b から成る集合 $\{b\}$ で，これはもちろんコンパクトである．しかし，$\{b\}$ の逆像は E 全体であって，コンパクトではない．したがってつぎのように要約できる．E から F への連続写像 f に関し，F の開集合〘閉集合〙の逆像は E の開集合〘閉集合〙であり，E のコンパクト集合の順像は F のコンパクト集合である．この区別は重要である．もちろん，この二つの事実を合わせればつぎの結果が得られる：E がコンパクトならば，E の閉集合の f による順像は F の閉集合である．なぜなら，コンパクト空間の閉集合はすべてコンパクトだからその順像はコンパクト，したがって閉集合となるからである．

定理 31.　空でないコンパクト空間から $\overline{\mathbf{R}}$ への連続写像は，必ず最大値および最小値を持つ．

証明.　集合 E から $\overline{\mathbf{R}}$ への関数 f に対し，その値全部の集合の上限を関数 f の上限と言うのであった．また，それが変数のある値に対する関数値になっているとき，それを関数 f の最大値と言うのであった．さて，f をコンパクト空間 E から補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ への連続写像とする．前定理 30 により，順像 $f(\mathrm{E})$ はコンパクトで，仮定によって空でない．定理 25 により，それは $\overline{\mathbf{R}}$ の空でない閉集合である．第1章定理 2（を 16 ページにあるように修正したもの）により，$f(\mathrm{E})$ は上限を持ち，しかもその上限は $f(\mathrm{E})$ の接触点である．$f(\mathrm{E})$ は閉集合だから上限は $f(\mathrm{E})$ に属する，すなわち最大値である．最小値についても同様である．　終．

この定理 31 は本質的に重要である．いろいろな証明を考えてみるとよい．たとえば，66 ページにハイネ=ボレル=ルベーグの性質に基づく証明がある．ここではもう一つ別のやりかたで証明してみよう．M を f の上限とし，M より真に小さい数の増大列で M に収束するもの M_0, M_1, M_2, …, M_n, … を取る．任意の n に対し，集合 $\mathrm{F}_n=\{x\,;\,x\in\mathrm{E},\ \mathrm{M}_n\leqslant f(x)\leqslant\mathrm{M}\}$ を考えると，まず

上限の特徴づけ (第1章定理 2) によって F_n は空でない. また, それは $\overline{\mathbf{R}}$ の閉区間 $[M_n, M]$ の連続関数 f による逆像だから閉集合である (定理 8). すなわち, 列 F_n は, コンパクト空間の空でない閉部分集合の減小列である. 定理 21, 系 2 により, F_n すべての共通部分も空でない. その点は, $f(x) = M$ となる E の点 x の全体である. よって f は最大値を持つ.

この証明を途中からつぎのように修正してもよい. $M_n \leqslant f(x_n) \leqslant M$ となる点 x_n が各 n に対して少なくとも一つ存在する. 点列 x_n は少なくとも一つの集積点 a を持ち (ヴァイエルシュトラス=ボルツァノ), その部分列 x_{p_0}, x_{p_1}, …, x_{p_n}, … で a に収束するものが存在する (定理 26). f は a で連続だから, 数列 $f(x_{p_n})$ は $f(a)$ に近づく. $M_{p_n} \leqslant f(x_{p_n}) \leqslant M$ だから $f(x_{p_n})$ は M に収束する. すなわち, $f(a) = M$ であり, M は f の最大値である.

系 1. コンパクト空間 E 上の連続な実数値関数は有界である. f をそのような関数とする. E のあらゆる点 x で $f(x) > 0$ ならば, ある実数 $\delta > 0$ を取ると, E のあらゆる点 x で $f(x) \geqslant \delta$ となる.

証明. f を $\overline{\mathbf{R}}$ に値を取る関数と考えると, それは上限 M を持ち, しかもそれは最大値なのだから, E のある点 a に対して $f(a) = M$ となる. よって $M < \infty$ となり, f は上有界である. 同様に f は下にも有界である. もし f がいたるところ真に正 (> 0) な値を取るならば, その最小値 δ も真に正であり, $f(x) \geqslant \delta$ となる. 終.

系 2. f を距離空間 E 上の実数値連続関数とし, K を E のコンパクト部分集合とする. すると, K のある近傍の上で f は有界となる. もし, f が K のすべての点で真に正ならば, 適当な数 $\delta > 0$ および K の適当な近傍を選ぶと, その近傍の上で $f(x) \geqslant \delta$ となる.

証明. 系 1 により, $f(K)$ は $\mathbf{R}$ の有界集合である. すなわち, ある数 M に対して $f(K) \subset]-M, +M[$ となり, したがって $K \subset f^{-1}(]-M, +M[)$ となる. この右辺を $\mathscr{U}$ とすると, f が連続, $]-M, +M[$ が開集合だから $\mathscr{U}$ は E の開集合で K を含む. すなわち $\mathscr{U}$ は K の近傍である. しかもその上での f の値の絶対値は M で押えられる.

つぎに K 上 $f(x) > 0$ とすると, 系 1 により, K 上 $f(x) \geqslant \delta'$ となる数 $\delta' > 0$ が存在する. $\delta = \dfrac{\delta'}{2}$ とすると, $f(K) \subset]\delta, +\infty[$, よって $K \subset f^{-1}(]\delta, +\infty[)$ となり, この右辺は K を含む E の開集合であり, その上で $f(x) \geqslant \delta$ となる. 終.

注意. この結果は不連続関数についてはもちろん正しくない. いたるところ有限値を取りながら有界でない不連続関数が存在する. 区間 $[0, 1]$ 上の関数を, 原点以外では $\dfrac{1}{x}$, 原点では 0 として定めると, これはコンパクト空間上の実数値関数で, 不連続点が一つある. この関数はいたるところ有限値を取るが有界ではない. また, 同じ結果は, 非コンパ

クト空間上の連続関数についても正しくない．たとえば $\mathbf{R}$ 上の関数 x は連続だが有界ではない．関数 $\mathrm{Arc\,tan}\,x$ は連続でしかも有界であるが，上限を関数値として取らない，すなわち最大値を持たない．

もちろん，定値関数を考えれば分るように，最大値や最小値は一点だけで取るとは限らない．

応用．　E を距離空間，F を E の閉集合，a を E の点とする．点 a と F の点との距離の下限（F の点を動かしたときの）を a と F との距離と言い，$d(a,\ \mathrm{F})$ と書く．a と F の点との距離はすべて 0 以上だから $d(a,\ \mathrm{F}) \geqslant 0$ である．$a \in \mathrm{F}$ ならばもちろん $d(a,\ \mathrm{F}) = 0$ であるが，$a \notin \mathrm{F}$ ならば $d(a,\ \mathrm{F}) > 0$ が成立つ．

実際，もし $d(a,\ \mathrm{F}) = 0$ ならば，a を中心とする任意の球に F の点が少なくとも一つ属し，したがって a は F に接触することになる．F は閉集合だから，a は F に属すことになり，仮定に反する．

写像 $a \mapsto d(a,\ \mathrm{F})$ が E から $\mathbf{R}$ への連続写像であることを示そう．すなわち，一点と閉集合との距離は，その点とともに連続的に変るのである．

証明．　$a,\ a'$ を E の二点とする．任意の $\delta > 0$ に対し，下限の性質（第1章定理 2）により，F の点 x で，$d(a,\ x) \leqslant d(a,\ \mathrm{F}) + \delta$ となるものが存在する．すると，$d(a',\ x) \leqslant d(a,\ x) + d(a,\ a') \leqslant d(a,\ \mathrm{F}) + d(a,\ a') + \delta$ だから，$d(a',\ \mathrm{F}) \leqslant d(a',\ x) \leqslant d(a,\ \mathrm{F}) + d(a,\ a') + \delta$ となる．δ は任意だから $d(a',\ \mathrm{F}) \leqslant d(a,\ \mathrm{F}) + d(a,\ a')$ が成立つ．a と a' とを交換すれば $d(a,\ \mathrm{F}) \leqslant d(a',\ \mathrm{F}) + d(a,\ a')$ が得られ，結局，

$$|d(a',\ \mathrm{F}) - d(a,\ \mathrm{F})| \leqslant d(a,\ a') \tag{8.1}$$

となる．これは，$d(a,\ a') \leqslant \varepsilon$ から $|d(a',\ \mathrm{F}) - d(a,\ \mathrm{F})| \leqslant \varepsilon$ が導かれることを意味する．すなわち，写像 $a \mapsto d(a,\ \mathrm{F})$ は連続である．　終．

そこで，与えられた a に対し，下限 $d = d(a,\ \mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{F}} d(a,\ x)$ が最小値であるかどうか，言換えれば，$d(a,\ c) = d$ となる F の点 c が存在するかどうかが問題になる．事実，もしも E 内の閉球がすべてコンパクトだという条件があれば（定理 25 により，E が有限次元のノルム線型空間のときにはそうなっている）そのような点が存在するのである．それを証明しよう．

a を中心とする半径 $d+1$ の閉球を B とする．仮定によって B はコンパクトである．$\mathrm{B} \cap \mathrm{F}$ は B の閉集合（定理 5）だからコンパクトである（定理 23）．したがって，$\mathrm{B} \cap \mathrm{F}$ 上の連続関数 $x \mapsto d(a,\ x)$ は最小値を持つ．その最小値を取る点の一つを c とすると $d(a,\ c) = d$ となる．実際，$x \in \mathrm{B} \cap \mathrm{F}$ ならば $d(a,\ c) \leqslant d(a,\ x)$ であるし，F の点 x が $\mathrm{B} \cap \mathrm{F}$ に属さなければ $d(a,\ x) \geqslant$

$d+1$ であるから，$d(a, c) \leqslant d+1 \leqslant d(a, x)$ となる．よってすべての $x \in \mathrm{F}$ に対して $d(a, c) \leqslant d(a, x)$ となり，たしかに $d(a, c)$ は最小値 d である．終．

つぎに E を距離空間，F_1，F_2 を E の閉集合とする．$x_1 \in \mathrm{F}_1$，$x_2 \in \mathrm{F}_2$ に対する $d(x_1, x_2)$ の下限を F_1 と F_2 との距離と言い，$d(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$ で表わす．$\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \varnothing$ であっても $d(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) = 0$ となることもある．たとえばユークリッド平面の双曲線とその漸近線との場合がそうである．このときは下限は最小値ではない．

しかし，F_1 がコンパクトで $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \varnothing$ ならば $d = d(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) > 0$ となる．また，E の閉球がすべてコンパクトのときには，この下限は最小値になる．

証明．　$d = \operatorname*{Inf}_{x_1 \in \mathrm{F}_1} d(x_1, \mathrm{F}_2)$ であるが，関数 $x_1 \mapsto d(x_1, \mathrm{F}_2)$ はすでに見たように F_1 上の連続関数であり，しかもいたるところ真に正（>0）である．F_1 はコンパクトだから，それは真に正の最小値 $d = d(c_1, \mathrm{F}_2) > 0$ を持つ．

つぎに E の閉球がすべてコンパクトのとき，すでに見たように，F_2 の点 c_2 で $d(c_1, c_2) = d(c_1, \mathrm{F}_2)$ となるものが存在する．すなわち $d(c_1, c_2) = d = d(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$ は最小値である．　終．

この結果はつぎの形で使われることが多い．E を距離空間，Ω を E の開集合，K を Ω に含まれるコンパクト集合とすると，$d = d(\mathrm{K}, \complement\Omega) > 0$ である．これは上の結果で $\mathrm{F}_1 = \mathrm{K}$（コンパクト），$\mathrm{F}_2 = \complement\Omega$ としたものにほかならない．

定理 32（ダランベール）[*)]．　複素係数の複素変数の m 次多項式は m 個の複素根を持つ．

証明．　m 個の複素根というのは，もちろんその重複度も数えての話である．

定理を証明するためには，$m \geqslant 1$ として多項式が根を少なくとも一つ持つことを示せば十分である．実際，a が根ならば，$z-a$ で割ると $m-1$ 次の多項式になるから，同じ論法を続けることができ，多項式の次数に関する帰納法によって定理が証明されたことになる．そこで，多項式

$$\mathrm{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \tag{8.2}$$

が根を一つも持たないと仮定して矛盾を導こう．$|z|$ が $+\infty$ に近づくとき，$|\mathrm{P}(z)|$ も $+\infty$ に近づくから，ある実数 R を取ると，複素平面内の原点を中心とする半径 R の円の外部では $|\mathrm{P}(z)| \geqslant |\mathrm{P}(0)|$ とすることができる．コンパクト集合 $|z| \leqslant \mathrm{R}$ における連続関数 $|\mathrm{P}|$ の最小値を $\mu > 0$ とする（定理 31 の系）．$|\mathrm{P}(z_0)| = \mu$ となる z_0 を取る．

---

*)　普通，「代数学の基本定理」と言われる．［訳注］

$|z| \geqq \mathrm{R}$ ならば $|\mathrm{P}(z)| \geqq |\mathrm{P}(0)| \geqq |\mathrm{P}(z_0)| = \mu$ だから，μ は複素平面全体での P の最小値である．多項式 P の z_0 でのテイラー展開

$$(8.3)\qquad \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}(z_0) + c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + c_m(z-z_0)^m$$

を考える．もちろん $c_k \neq 0$ とする．十分小さな数 $\rho > 0$ を取ると，z_0 を中心とする半径 ρ の円周上で，不等式

$$(8.4)\qquad |c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + c_m(z-z_0)^m| < |c_k(z-z_0)^k| = |c_k|\rho^k$$

が成立つ．さらに ρ は $|c_k|\rho^k < \mu$ を充たすように取っておく．z が円周 Γ を動くと，$c_k(z-z_0)^k$ は原点を中心とする半径 $|c_k|\rho^k$ の円周をくまなく動き，したがって $\mathrm{P}(z_0) + c_k(z-z_0)^k$ は $\mathrm{P}(z_0)$ を中心とする半径 $|c_k|\rho^k$ の円周をくまなく動く，よって，Γ の点 z_1 を適当に取ると，点 $\mathrm{P}(z_0) + c_k(z_1-z_0)^k$ が線分 $[0, \mathrm{P}(z_0)]$ に乗っていることになる．すると，

$$(8.5)\qquad |\mathrm{P}(z_0) + c_k(z_1-z_0)^k| = \mu - |c_k|\rho^k$$

が成立ち，これから，

$$(8.6)\qquad \begin{aligned} |\mathrm{P}(z_1)| &\leqq |\mathrm{P}(z_0) + c_k(z_1-z_0)^k| + |c_{k+1}(z_1-z_0)^{k+1} + \cdots + c_m(z_1-z_0)^m| \\ &< (\mu - |c_k|\rho^k) + |c_k|\rho^k = \mu \end{aligned}$$

が出る．ところが $|\mathrm{P}(z_1)| < \mu$ は μ が最小値だという仮定に反する．　終．

定理 31 の一般化．　f を位相空間 E 上の，$\overline{\mathbf{R}}$ に値を取る関数とする．f が E の点 a で**上半連続**であるとは，任意の $b_1 > f(a)$ に対し，a の E での近傍 $\mathscr{V}'$ を適当に取ると，$x \in \mathscr{V}'$ なるかぎり $f(x) \leqq b_1$ となることである．f が a で**下半連続**であるとは，任意の $b_2 < f(a)$ に対し，a の E での近傍 $\mathscr{V}''$ を適当に取ると，$x \in \mathscr{V}''$ なるかぎり $f(x) \geqq b_2$ となることである．

実数値関数が連続になるのは，それが同時に上半連続かつ下半連続のときである．定理 31 はつぎのように一般化される．

定理 33.　コンパクト空間上の上半連続関数は最大値を持つ．下半連続関数は最小値を持つ．

証明.　f をコンパクト空間 E から $\overline{\mathbf{R}}$ への上半連続関数とし，その上限を M とする．これが最大値でないと仮定すると，どの $x \in \mathrm{E}$ に対しても $f(x) < \mathrm{M}$ となる．x を固定し，$\varepsilon_x < \mathrm{M} - f(x)$ なる ε_x を取ると，上半連続性により，x のある開近傍 $\mathscr{V}_x$ の上では f は $\mathrm{M}_x = f(x) + \varepsilon_x < \mathrm{M}$ によって押えられる．そこで x を動かすと，$\mathscr{V}_x$ の全体は E の開被覆となる．E はコンパクトだから，有限部分被覆が存在する．すなわち，E の有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対する $\mathscr{V}_{x_1}, \mathscr{V}_{x_2}, \cdots, \mathscr{V}_{x_n}$ の合併は E 全体になる．$\mathscr{V}_{x_i}$ 上 f は $\mathrm{M}_{x_i} < \mathrm{M}$ で押えられるから，E 全体の上で f は，$\mathrm{M}_{x_1}, \mathrm{M}_{x_2}, \cdots, \mathrm{M}_{x_n}$ の最大値 $\mathscr{M}$ によって押えられる．$\mathscr{M} < \mathrm{M}$ であり，これは M が f の上限であることに反する．よって M は最大値である．　終．

一 様 連 続 性

ここで述べる性質は距離空間に特有のものであり，一般の位相空間には拡張されない．しかも，二つの距離が同値であっても同じ結果を与えるとは限らない*)．

定義.　E, F を距離空間，f を E から F への写像とする．f が**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，適当な $\eta>0$ を取ると，$d(x',x'')\leqslant\eta$ なる限り $d(f(x'),f(x''))\leqslant\varepsilon$ となることである．

記号的にはつぎのように書かれる：

(8.7)　$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)\ (\forall x'\in\mathrm{E},\ \forall x''\in\mathrm{E},\ d(x',x'')\leqslant\eta)$:
$$d(f(x'),\ f(x''))\leqslant\varepsilon.$$

一様連続関数はもちろん連続であるが，逆は成立たない．関数 f が連続だと言うのは，任意の $\varepsilon>0$ と任意の $a\in\mathrm{E}$ に対し，適当な $\eta>0$ を取ると，$d(x,a)\leqslant\eta$ なる限り $d(f(x),f(a))\leqslant\varepsilon$ となることであった．この η は ε と a の両方に依存する．一様連続の方は η が ε だけにしか依存しないのである（これについては第1章 27 ページ参照）．

実数直線上，関数 x は一様連続だが，関数 x^2 は違う．実際，$h\geqslant0,\ x\geqslant0$ に対し，$|(x+h)^2-x^2|=|2hx+h^2|\geqslant2hx$ となるから，与えられた ε に対して，h を，$|2hx+h^2|\leqslant\varepsilon$ が成立つように選ぶためには，$|h|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2|x|}$ になるように選ばなければならない．このような h を x に無関係に選ぶことはできない．

$0<\alpha\leqslant1$ なる α に対し，E から F への関数 f が **α 位のヘルダー条件**または**リプシッツ条件**を充たすとは，定数 k を適当に選ぶと，任意の $x',\ x''\in\mathrm{E}$ に対して

(8.8)
$$d(f(x'),\ f(x''))\leqslant k[d(x',\ x'')]^\alpha$$

が成立つことである**)．とくに $\alpha=1$ のときには，(«1位の» とわざわざ言わずに) 単に f は**リプシッツ条件**を充たすまたは**リプシッツ連続**であると言う．

f が α 位のヘルダー条件を充たすならば，（f がリプシッツ連続ならばもちろん）f は一様連続である．もちろん逆は成立たない．たとえば，$x\in\left]0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

*) すなわち，距離空間 E から距離空間 F への写像が一様連続であっても，これらの距離を同値な距離に置換えたものに対してはもう一様連続でなくなることがある．しかし，線型空間のノルムから定まる距離の場合には，これを同値なノルムで置換えても一様連続性の概念は変わらない．これは定理 12 による．

**) $\alpha>1$ のときは興味がない．たとえば $\mathrm{E}=\mathrm{F}=\mathbf{R}$ のとき，f が $\alpha>1$ に対する上の条件を充たすとすると，$\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant k|h|^{\alpha-1}$ となるから f はいたるところ導値 0 を持ち，したがって定値関数になってしまう．

に対しては $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$, $f(0)=0$ として定まる $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ 上の関数 f は連続であり，したがって一様連続である（定理 34）．しかし，$|f(x)-f(0)|=\dfrac{1}{|\log x|}$ は $k|x|^{\alpha}$ の形のものによっては押えられない．

定理 34.　コンパクト距離空間 E から距離空間 F への連続写像は一様連続である．

証明.　f が一様連続でないと仮定して矛盾を導こう．この仮定を記号的に書くと，

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\eta>0)(\exists x'\in \mathrm{E},\ \exists x''\in \mathrm{E},\ d(x',\ x'')\leqslant\eta):d(f(x'),\ f(x''))>\varepsilon$$

となる．このεを取る．任意の整数 $n\geqslant 1$ に対し，点 x'_n, x''_n を適当に選ぶと，$d(x'_n,\ x''_n)\leqslant\dfrac{1}{n}$ かつ $d(f(x'_n),\ f(x''_n))>\varepsilon$ となる．E がコンパクトだから，点列 x'_n から，ある点 x に収束する部分列 $n\to x'_{p_n}$ を取出すことができる（定理 26, 27）．関係 $d(x'_n,\ x''_n)\leqslant\dfrac{1}{n}$ により，対応する x''_n の部分列 x''_{p_n} も同じ点 x に収束する．f は連続だから，二つの点列 $f(x'_{p_n})$, $f(x''_{p_n})$ はともに $f(x)$ に収束する（定理 16）．だから，n を十分大きくとれば，$d(f(x'_{p_n}),\ f(x))\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ かつ $d(f(x''_{p_n}),\ f(x))\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ となり，したがって $d(f(x'_{p_n}),\ f(x''_{p_n}))\leqslant\varepsilon$ となる．これは x'_n, x''_n の選びかたに反する．　終．

実数直線 **R** のときの例で見たように，コンパクトでない距離空間の場合には，関数が連続でありながら一様連続でないことがありうる．そのため，定理 34 を改良した形がしばしば必要になる（第3章 § 11 定理 62 の後の脚注参照）．

§ 9.　連 結 空 間

位相空間のあるものは直観的に一続きのものである．たとえば $\mathbf{R}^n$ 内の球面，球等がそうである．これに反し，あるものはいくつかの《かたまり》に分れている．たとえば共通点のない二つの球面から成る空間とか，$\mathbf{R}^n$ における球面の補集合などがそうである．この直観的概念を厳密に定義しよう．

定義.　位相空間 E が二つの開集合に分割されないとき*)，E は**連結**であると言う．または，二つの閉集合に分割されないとき，と言ってもよい．また，E と ∅ 以外に開かつ閉な部分集合がないとき，と言っても同じことである．

これら三つの定義がたがいに同値であることは，開集合の補集合が閉集合であることから明らかである．コンパクト性と同様，連結性も位相空間それ自身の性

*)　分割の定義は第1章 10 ページ参照．

質である．E の部分集合 F が連結だと言ったら，それは E からの導入位相による位相空間として F が連結であることを意味する．

定理 35.　補完実数直線 $\bar{\mathbf{R}}$ の部分集合 E が連結であるのは，それが区間（開区間，半開区間，閉区間のいずれか）である場合である．

証明.　まず E を $\bar{\mathbf{R}}$ の連結集合とする．E の任意の二点 x, y に対して，閉区間 $[x, y]$ が E に含まれることを示そう．もしそうでないとすると，E に属さない点 z で，この閉区間に属するものがある．二つの部分集合 $[-\infty, z[$, $]z, +\infty]$ はともに $\bar{\mathbf{R}}$ の開集合であり，それらと E との共通部分は，E の開集合による E の分割となる（$z \notin$ E だから）．これは E が連結だという仮定に反する．そこで，E の下限，上限をそれぞれ a, b とすると，いま見たことにより，E は $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ の四種類の区間のいずれかと一致する．

逆に E が $\bar{\mathbf{R}}$ の区間だとする．A を E の空でない部分集合で開かつ閉なるものとする．A＝E となることを示せば E の連結性が証明される．区間 E の下限，上限をそれぞれ a, b としておく．A の点 c に対し，$[c, x] \subset$ A となる E の点 x の全体を H とする．γ を H の $\bar{\mathbf{R}}$ における上限とする．$c \leqq \gamma' < \gamma$ なる任意の γ' に対し，$\gamma' < x \in$ H なる x が存在するから $\gamma' \in$ A, $[c, \gamma'] \subset$ A となる．A は E の閉集合だから，$\gamma = b \notin$ E でないかぎり $\gamma \in$ A, $[c, \gamma] \subset$ A が成立つ．もし，$\gamma < b$ であると，A は開集合でもあるから，$\gamma < \gamma''$ なる γ'' で $[\gamma, \gamma''] \subset$ A なるものが存在する．$[c, \gamma''] \subset$ A, $\gamma'' \in$ H となり，γ が H の上限であることに反する．したがって $\gamma = b$, $[c, b[\subset$ A である．もし $b \in$ E ならば $b \in$ A ともなっている．同じ議論を c の左側に行なうことにより，$]a, c] \subset$ A が得られ，さらに $a \in$ E ならば $a \in$ A が得られる．よって A＝E である．終．

系.　有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は連結でない．

定理 36.　連結な位相空間の連続写像による順像はまた連結である．

証明.　E を連結位相空間，F を位相空間，f を E から F への連続写像とする．もちろん，F 自身が連結だと言うのではない．E の順像 f(E) が連結だということを証明するのである．f(E) が連結でないと仮定する．f(E) は二つの開集合 A, B に分割される．それらの逆像は E の分割になる（まず，(2.3) によって $f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B}) = \emptyset$. E の任意の x に対し，$f(x)$ は A または B に属するから x は f^{-1}(A) または f^{-1}(B) に属する．すなわち，$f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}$. さらに A も B も空でないから，$f^{-1}$(A) も f^{-1}(B) も空でない）．さらに，定理 7 により，f^{-1}(A), f^{-1}(B) はともに E の開集合である．これは E の連結性に反する．　終．

系.　f が連結空間 E から $\bar{\mathbf{R}}$ への連続写像であるとき，その順像すな

わち値の全体は $\overline{\mathbf{R}}$ の区間（開，半開，閉）である．

証明．　f による E の順像は前定理によって連結だから，定理 35 を適用すればよい．終．

この定理は，とくに E の方も $\overline{\mathbf{R}}$ の区間であるとして提出されることが多い．また，この定理はつぎのように簡潔に表現される：連結空間上の実数値関数は，二つの値の中間の値をすべて取る．これを**中間値の定理**と言う．しかし，この性質が（連結空間上の）連続関数を特徴づけるものでないことは注意を要する．すなわち，連結空間上の不連続関数でこの性質を持つものが存在する．たとえば $\mathbf{R}$ 上の関数 f を，$f(0)=0$，$x \neq 0$ に対しては $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ で定めると，f は原点で不連続であるが上の性質を持つ．この関数の値集合は閉区間〔-1, $+1$〕であり中間値の定理が成立つ．

定理 36 の逆定理はつぎの形で成立つ．

定理 37.　位相空間 E 上のすべての実数値連続関数に対して中間値の定理が成立てば E は連結である．

証明．　E が連結でなければ，二つの開集合 A，B による分割が存在する．A 上 0，B 上 1 として定まる実数値関数は連続である．なぜなら，$\mathbf{R}$ の任意の閉集合の逆像は，それが 0，1 を含むか含まないかに従って，E の四つの開集合 $\emptyset$，A，B，E のどれかになるからである．この関数は値 0，1 を取るが，その中間の値は取らない．これは $\mathbf{R}$ の連結性に反する．　終．

弧連結空間

位相空間が連結であることを判定する方法があると都合がよい．そのために，弧連結空間の概念を導入する．

位相空間 E の二点 a，b を結ぶ**弧**または**路**とは，$\mathbf{R}$ の閉区間〔α, β〕から E への連続写像 f で，$f(\alpha)=a$，$f(\beta)=b$ となるものを言う．a，b をそれぞれこの弧の**始点**，**終点**と言う．

弧の定義には写像 f が含まれているのであって，これを f による区間の像と混同してはならない．f による〔α, β〕の像を**弧 f の像**と言う．たとえば，f が定値写像のとき，弧 f の像は一点であるが，弧そのものはあくまで写像 f である．

また，ベルヌイのレムニスケートを考えると，その上を二つの異なる向きに走ることができるが，どう走ってもその像集合としてのレムニスケートは同一である．すなわち，同じレムニスケートが，$\mathbf{R}$ のある区間から平面への二つの異なる弧の像になっている．



弧 f の像 $f([\alpha,\ \beta])$ が E の点 c を含むとき，弧 f は c を通る，と言う．また E の部分集合 A が $f([\alpha,\ \beta])$ と交わるとき弧 f は A と交わる，と言う．

二点 a, b がある弧で結ばれ，また二点 b, c がある弧で結ばれるならば，二点 a, c もある弧によって結ばれる（明らか）．

定理 38.　位相空間 E の任意の二点がある弧によって結ばれれば E は連結である．

証明.　E が連結でないと仮定する．E は二つの開集合 A, B に分割される．A の点 a, B の点 b を取ると，仮定によって a, b は弧で結ばれる．この弧の像を K とすると，$K\cap A$, $K\cap B$ は K の開集合で，たがいに他の補集合でなる（定理 5）．しかもそれぞれ点 a, b を含むから，どちらも空でない．すなわちそれは K の開集合による分割である．ところが定理 36 により，連結空間 $[\alpha,\ \beta]$ の連続写像による像として，K は連結であるから，これは不合理である．よって E は連結でなければならない．　終．

この定理の逆は成立たない．たとえば，ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ に二つの座標軸を固定し，関数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ を表わす曲線と，y 軸上の線分 $x=0$, $|y|\leqq 1$ との合併集合を E とする．E は連結であることが証明できるが，その二つの点 $(0,\ 0)$ と $\left(a,\ \sin\dfrac{1}{a}\right)$ とは弧で結ぶことができない．

位相空間 E の任意の二点が弧で結ばれるとき，E は**弧連結**であると言う．これは連結性より強い性質である．

例.　ノルム線型空間はすべて弧連結である．実際，その任意の二点は，その一方を始点，他方を終点とする線分を像とするような弧によって結ばれる．

定理 39（関所越えの定理）.　E を位相空間，A を E の部分集合とする．A の内部の一点と外部の一点とを結ぶ弧は，必ず A の境界と交わる．

証明.　定理 35 によって弧の像は連結だから，この定理はつぎの定理の特別な場合となる．

E の連結部分集合 B が A の内部とも外部とも交わるならば，B は必ず A の境界とも交わる．

証明.　もし B が A の境界と交わらないとすると，B は A の内部と外部との合併に含まれる．B とそれらとの共通部分は B の開集合による分割を与えることになり，B の連結性に反する．　終．

§ 10. 連結空間（続き）

定理 40.　位相空間 E の連結部分集合の族 $(A_i)_{i\in I}$ があって，どの二つもたがいに共通点を持つならば，$(A_i)_{i\in I}$ の合併集合 A はまた連結である．

証明.　そうでないとすると，A は二つの開集合 B', B'' に分割される．各 i に対し，$A_i \cap B'$, $A_i \cap B''$ はともに A_i の開集合で共通点を持たず，その合併は A_i である．A_i は連結だから，その一方は空集合，一方は A_i 全体になる．よって，A_i は B' または B'' に含まれる．つぎに任意の i, j に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ だから，A_i, A_j ともに B' に含まれるか，ともに B'' に含まれるかのどちらかである．したがって，すべての i に対する A_i が B' に含まれるか，またはすべての i に対する A_i が B'' に含まれるかのどちらかとなる．すなわち，A は B' または B'' に含まれる．これは，B', B'' が A の分割であること（B' も B'' も空でない）に反する．　終.

定理 41.　E を位相空間，A を E の連結な部分集合とすると，A の E での閉包 $\overline{A}$ も連結である．

証明.　$\overline{A}$ が連結でないとすると，$\overline{A}$ は二つの閉集合 B', B'' に分割される．$\overline{A}$ 自身が E の閉集合だから，B', B'' は E 内でも閉じている（定理 6）．よって，A はたがいに共通点のない二つの閉集合 $A \cap B'$, $A \cap B''$ の合併になる．A は連結だからどちらか一方は空集合でなければならない．たとえば，$A \cap B' = \emptyset$, $A \cap B'' = A$ とすると $A \subset B''$ となる．B'' は E の閉集合だから $\overline{A} \subset B''$ となり，B', B'' が $\overline{A}$ の分割であることに反する．よって $\overline{A}$ は連結である．　終.

定義.　位相空間 E の二点 x, y に対し，その両方を含む E の連結部分集合が存在するとき，二点 x, y は**連結される**と言う．弧によって結ばれる二点は連結される．

定理 42.　《x と y とは連結される》という関係は E の同値関係である．

証明.　反射性と対称性は明らかだから推移性を証明しよう．x と y が連結され，y と z とも連結されるとする．すると，x, y を含む連結集合，y, z を含む連結集合がそれぞれ存在する．この二つの連結集合は共通点 y を持つから，定理 40 により，その合併集合は連結である．それは x と z とを含むから，x と z とは連結される．　終.

定義.　《x と y とは連結される》という E の同値関係に関する E の同値類の一つ一つを E の**連結成分**と言う．それらはたがいに交わらず，

それらすべての合併は E である．E の点 x の属する連結成分を x の連結成分と言う．

定理 43. E の一点 x の連結成分は x と連結される点の全体であり，x を含む連結集合のうち最大のものである．連結成分はどれも閉集合である．

証明. 1° 同値類の定義そのものにより，x の連結成分 E_x は x と連結される点の全体である．x を含む任意の連結集合は，そのすべての点が x と連結されるのだから，当然 E_x に含まれる．一方，E_x の任意の点 y は x と連結されるから，x の属するある連結集合に含まれる．E_x はこれらの連結集合すべての合併であり，それはどれも共通点 x を含むから，定理 40 により，その合併は連結である．すなわち E_x は連結である．E_x は x を含む連結集合で，x を含む任意の連結集合を含む．すなわち E_x は x を含む最大の連結集合である．

2° 定理 41 により，E_x の閉包 $\overline{E_x}$ も連結である．E_x の最大性により $\overline{E_x} = E_x$ となる．すなわち E_x は閉集合である． 終.

定義. 位相空間 E の各点 a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，$\mathscr{V}$ に含まれる a の近傍 $\mathscr{V}'$ で連結なものが存在するとき，E は**局所連結**であると言う．言葉の示すとおり，この性質は局所的性質である．一方，連結性は大域的性質である．この二つの性質はたがいに関係ない[*]．

例. 1° $\mathbf{R}^2$ において二直線 $y=0$, $y=1$ の合併を E とすると，E は連結でないが局所連結である．実際，E の点 a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ は，a を中心とする水平方向の区間を少なくとも一つ含む．その区間は連結である．

2° 平面 $\mathbf{R}^2$ において，y 座標が有理数であるような点の全体と y 軸との合併集合を E とする．E は局所連結でない．実際，座標が (a, b), $a \neq 0$ なる点の近傍として，その点を中心とする半径が $|a|$ より真に小さい（$<|a|$）円板を取ると，この中には a の連結近傍は含まれない．一方 E は連結である．さらに強く，弧連結でさえある．実際，E の任意の二点は，三つの線分を合わせた弧によって結ばれる．まず x 軸に平行な線分によって y 軸に達し，つぎに y 軸上の線分を取り，またそこから x 軸に平行な線分で終点に達する．E は連結でありながら局所連結でない空間である．

定理 44. 位相空間 E が局所連結ならば，その連結成分はどれも E の

---

*) これはコンパクト性と大いに違う．コンパクト空間は局所コンパクトであった（逆は成立たない）が，連結空間必ずしも局所連結ではない．

中で開かつ閉である．

証明.　x の連結成分 E_x の任意の点 y を取る．E は局所連結だから y は連結近傍を持つ．この近傍の任意の点 z は y と連結され，したがって x と連結される．よって E_x はこの近傍を含む．すなわち E_x はその各点の近傍を少なくとも一つ含むから開集合である．定理 43 によってそれは閉集合でもある．　終．

注意.　1° 逆は成立たない．上の例 2° の空間 E は連結だから，その連結成分は E だけであり，これは開かつ閉である．しかし E は局所連結ではない．

2° E をあるノルム線型空間 E_0 の開集合とする．E は局所連結である．なぜなら，E の任意の点 a に対し，a を中心とする E_0 内のある球は E に含まれ，球はすべて見たように連結，いや弧連結でもある．したがって E には定理 44 が適用され，E の連結成分はすべて E の開集合，したがって E_0 の開集合である．

3° 連結成分がすべて開かつ閉となる重要な場合がもう一つある．それは連結成分が有限個しかない場合である．この場合，一つの連結成分はまず閉集合であり，さらにそれは他の連結成分すべての合併の集合の補集合であり，閉集合有限個の合併はまた閉集合だから，その補集合として開集合になる．

定義.　位相空間 E の各点 a の任意の近傍 $\mathscr{V}$ に対し，$\mathscr{V}$ に含まれる a の近傍 $\mathscr{V}'$ で弧連結なものが存在するとき，E は**局所弧連結**であると言う．弧連結空間は連結だから，局所弧連結ならば局所連結である．ノルム空間の開集合は局所弧連結である．

定理 45.　E を局所弧連結空間とする．もしそれが連結ならば，それは弧連結でもある．連結でない場合には，その連結成分はどれも開かつ閉であり，しかも弧連結である．

証明.　E の一点 x を取り，弧によって x に結ばれる E の点全体を F_x とする．F_x の任意の点 y に対し，仮定により，y の近傍でその任意の点 z が弧によって y に結ばれるようなものが存在する．y は x と弧で結ばれるから，z も x と弧で結ばれ，z は F_x に属する．すなわち F_x はその各点の近傍を少なくとも一つ含み，したがって開集合である．

一方，F_x は閉集合でもある．F_x の補集合が開集合であることを証明しよう．y を F_x の補集合の任意の点，すなわち F_x に属さない任意の点とする．y の近傍 $\mathscr{V}$ で，その任意の点が y と弧で結ばれるものが存在する．$\mathscr{V}$ は F_x と共通点を持たない．なぜなら，もし $z \in \mathscr{V} \cap F_x$ とすると，x と z とは弧で結ばれ，z と y とも弧で結ばれるから，x と y とも弧で結ばれることになり，$y \notin F_x$ に反する．すなわち，F_x の補集合は，その任意の点の近傍を少なくとも一つ含む，すなわち開集合である．よって F_x は閉集合である．

ここでもし E が連結ならば，F_x は開かつ閉で点 x を含むから $F_x = E$ となる．すな

わち E は弧連結である.

つぎに E が連結でない場合，E の点 x の連結成分を E_x とすると，F_x は弧連結ゆえに連結だから，$F_x \subset E_x$ となる．F_x は E の中で開かつ閉，したがって E_x の中でも開かつ閉，一方 E_x は連結だから $F_x = E_x$ となる．したがって E_x は弧連結であり，E の中で開かつ閉である．　終.

注意.　1°　以上の二つの定理は，とくに E が多様体の場合に適用される（第3章，§9参照）．その場合，E の各点の任意の近傍は，球と同相な近傍を含み，したがって E は弧連結となる.

2°　同様な方法で，同種類の定理が簡単に証明される.

たとえば E がノルム空間の開集合であるとしよう．E は**局所折線連結**である．すなわち，各点 a の任意の近傍に対し，それに含まれる a の近傍（たとえば a を中心とする球）で，その任意の二点が折線（線分を有限個接続してできる弧，球の場合にはただ一個の線分で十分）によって結ばれるようなものが存在する．そして，いまと同じ証明法によってつぎのことが証明される*)：E が連結ならばそれは折線連結であり，E が連結でない場合には，その連結成分はどれも折線連結である.

E が標構を備えた有限次元ノルム空間の開集合である場合には，さらに，E の各連結成分が《座標軸に平行な線分から成る折線によって》連結であることが同様に証明される．すなわち，E の連結成分の任意の二点は，座標軸に平行な線分を有限個接続して得られる弧によって結ばれる.

連結性の概念の応用．非同相性の判定

コンパクト性の概念を使って二つの位相空間が同相でないことを判定する手段が得られた（54, 58 ページ）のと同様，連結性の概念もまたそのための手段となる．なぜなら，二つの位相空間の一方が連結，一方が非連結であれば，それらは同相ではありえないからである．たとえば実数直線 $\mathbf{R}$ と平面 $\mathbf{R}^2$ とを考えよう．すでに見たようにこの二つの集合は同じ濃度を持ち，一方から他方への双射が存在する．また簡単に分るように，平面から直線への連続な上射が存在する．たとえば射影 $(x, y) \longmapsto x$ がそうである．一方ペアノは直線 $\mathbf{R}$ から平面 $\mathbf{R}^2$ への連続な上射も存在することを証明した．これは非常に難かしく，また複雑なものであるが，上射ではあっても決して双射ではないのである．すなわち，一見奇妙に思われるが，平面上の点で，その逆像がたくさんあるものが必ず存在するのである．簡単に証明できるように，直線から平面への同相写像は存在しない．直線は定理 35 によってつぎの性質を持つ：$\mathbf{R}$ から一点を取除くと，残りの空間は連結でない．ところが平面はこの性質を持たない．平面から一点を取除いても，

*)　点 x から折線によって結ばれる点の全体を F_x とすればよい.

その残りは明らかに依然として連結であり，弧連結でさえある*⁾．したがって平面と直線とは同相でない．同様に，$\mathbf{R}$ の閉区間 $[a,\ b]$ と $\mathbf{R}^2$ 内の円周とはともにコンパクトであるが同相ではない．実際，区間 $[a,\ b]$ からたとえばその中点を取除くと，残りは連結でなくなるが，円周からどの一点を取除いても，残りはやはり連結である．

つぎのことも証明されるが難かしい．次元の異なる有限次元ノルム空間はたがいに同相でない．また，$m \neq n$ ならば $\mathbf{R}^m$ 内の球面と $\mathbf{R}^n$ 内の球面とは同相でない．

真に単調な連続関数の逆関数の存在と連続性

定理 46.　f が $\overline{\mathbf{R}}$ の区間 $|a,\ b|$（開，半開，閉のいずれか）から $\overline{\mathbf{R}}$ への真増加連続写像ならば，その像 $f(|a,\ b|)$ も区間 $|\alpha,\ \beta|$（対応して開，半開，閉）であり，f は $|a,\ b|$ から $|\alpha,\ \beta|$ への同相写像である．$\hat{f}(a)=\alpha,\ \hat{f}(b)=\beta$ と置いて f を延長した写像 $\hat{f}$ は閉区間 $[a,\ b]$ から閉区間 $[\alpha,\ \beta]$ への同相写像である．

証明.　f の像が区間 $|\alpha,\ \beta|$ になることは定理 36 の系から出る．f が単射であることは f が真増加であることから出る．よって f は $|a,\ b|$ から $|\alpha,\ \beta|$ への連続な双射である．f は順序関係を保ち，$a=\mathrm{Inf}(|a,\ b|)$，$\alpha=\mathrm{Inf}(|\alpha,\ \beta|)$ であるから，α が f の像に属するのは，a が区間 $|a,\ b|$ に属するときである．b と β とに関しても同様である．よって，区間 $|a,\ b|$ が開，半開，閉であるのに従って，区間 $|\alpha,\ \beta|$ も開，半開，閉である．$|a,\ b|$ の開集合の像は $|\alpha,\ \beta|$ の開集合だから f は $|a,\ b|$ から $|\alpha,\ \beta|$ への同相写像である（定理 11）．f の逆写像 f^{-1} も真増加で，$|\alpha,\ \beta|$ から $|a,\ b|$ への連続な双射である．

変数 x が真に右側から a に近づくとき，$f(x)$ は α に近づく（47 ページ参照）．実際，任意の $\alpha'>\alpha$ に対し，区間 $]\alpha,\ \alpha'[$ の逆像は区間 $]f^{-1}(\alpha),\ f^{-1}(\alpha')[$，すなわち a の $\overline{\mathbf{R}}$ におけるある近傍と区間 $]a,\ b[$ との共通部分である．だから，$\hat{f}(a)=\alpha,\ \hat{f}(b)=\beta$ と置いて f を延長したものを $\hat{f}$ とすれば，$\hat{f}$ は $[a,\ b]$ から $[\alpha,\ \beta]$ への真増加連続写像で，したがって同相写像である．もし，$a=-\infty,\ b=+\infty$ で，$\alpha,\ \beta$ が有限ならば，$\hat{f}$ は $\overline{\mathbf{R}}$ から $\mathbf{R}$ の有界閉区間への同相写像となる．　終．

注意.　f が真に単調であることを仮定するのは当然である．$\overline{\mathbf{R}}$ の区間 $|a,\ b|$ から $\overline{\mathbf{R}}$ への連続な単射は必然的に真に単調である．なぜなら，もしそうでないと仮定すると，$|a,\ b|$ の三点 $x_1,\ x_2,\ x_3$ で，$x_1<x_2<x_3$ であって，$f(x_1)<f(x_2)$ かつ $f(x_2)>f(x_3)$ となるかまたは $f(x_1)>f(x_2)$，かつ $f(x_2)<f(x_3)$ となるものが存在すること

---

*⁾ 任意の二点は，高々二つの折線をつなげた弧によって結ばれる．

になる．第一の場合が起ったとし，開区間 $]f(x_1),\ f(x_2)[$ と開区間 $]f(x_3),\ f(x_2)[$ との共通点 y を取ると，中間値の定理（定理 36 の系）により，区間 $]x_1,\ x_2[$ の点 x' および区間 $]x_2,\ x_3[$ の点 x'' でともに f による値が y であるものが存在することになり，f が単射だという仮定に反する．　終．

応用：$\overline{\mathbf{R}}$ の位相を定める距離

定理 47.　$\overline{\mathbf{R}}$ には距離が付けられる．すなわち，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への有界，連続な真増加写像 f に対し，$\overline{\mathbf{R}}$ の距離を

$$d(x,\ y) = |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|, \quad x,\ y \in \overline{\mathbf{R}} \tag{10.1}$$

によって定めることができ，この距離は $\overline{\mathbf{R}}$ の自然位相を定める．ここで，$\hat{f}$ は，$\hat{f}(-\infty) = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbf{R}} f(x)$，$\hat{f}(+\infty) = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbf{R}} f(x)$ と置いて f を延長した $\overline{\mathbf{R}}$ から $\overline{\mathbf{R}}$ への写像である．

証明.　定理 46 により，f は $\mathbf{R}$ から $\overline{\mathbf{R}}$ の区間 $]\alpha,\ \beta[$ への同相写像である．f は有界だから $\alpha > -\infty$，$\beta < +\infty$ となり，さらに $\alpha = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbf{R}} f(x)$，$\beta = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbf{R}} f(x)$ であり，f の延長 $\hat{f}$ は，$\overline{\mathbf{R}}$ から $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[\alpha,\ \beta]$ への同相写像である．

区間 $[\alpha,\ \beta]$ の位相は $\mathbf{R}$ の自然位相から導入されたものだから，$\overline{\mathbf{R}}$ の自然位相は，$[\alpha,\ \beta]$ の距離を $\hat{f}^{-1}$ によって<u>移した距離</u>によって定まる．すなわち，$\overline{\mathbf{R}}$ の二点 x，y の距離を $\hat{f}(x)$ と $\hat{f}(y)$ との自然距離すなわち $|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|$ としたものによって定まる．　終．

たとえば，

$$f(x) = \operatorname{Arc\,tan} x, \quad \hat{f}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \quad \hat{f}(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \tag{10.2}$$

とすると，$d(x,\ y) = \left|\int_x^y \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right|$ となる．もっと一般に，$\mathbf{R}$ 上の真正値可積分関数 h に対して

$$d(x,\ y) = \left|\int_x^y h(\xi)d\xi\right| \tag{10.3}$$

と置くことができる．

さらにつぎの二つの例を挙げておこう：

$$f(x) = \tanh x, \quad \hat{f}(-\infty) = -1, \quad \hat{f}(+\infty) = +1 \tag{10.4}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \hat{f}(-\infty) = -1, \quad \hat{f}(+\infty) = +1 \tag{10.5}$$

これらの距離はたがいに非常に違っているが，どれも同じ位相を与えるのだから，$\overline{\mathbf{R}}$ 上の（したがって $\mathbf{R}$ 上の）同値な距離である．

§ 11. 完備距離空間

E を距離空間, x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$ を E の点列で点 x に収束するものとする. この点列は**コーシーの判定基準**と称するつぎの性質を持つ:

(11. 1) $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists p \in \mathbf{N})$ $(\forall m \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ m \geqslant p,\ n \geqslant p)$:

$$d(x_m,\ x_n) \leqslant \varepsilon.$$

言換えれば,

(11. 2) m, n が $+\infty$ に近づくとき, $d(x_m,\ x_n)$ は 0 に近づく.

この性質を持つ点列を**コーシー列**または**基本列**と言う.

逆に, すでに学んだはずであるが, 実数体または複素数体上のコーシー列はつねに収束する. これは基本的な性質である. 点列の収束性を判定するとき, 収束すべき極限値を想定しないままでは収束の定義は使えないが, この性質を使えば, 極限値を想定することなく収束性の判定ができるのである. また, この性質を使うと, 級数の収束性を, あらかじめ和を想定することなく判定することができる. これは解析学では本質的に重要である. ところが, この実数体および複素数体に対して成立つ性質は, 一般の距離空間に対しては成立たない. この節ではこの問題を扱う.

まずコーシー列の基礎的な性質をいくつか挙げよう.

定理 48. コーシー列の部分列はコーシー列である. コーシー列は有界である.

証明. 前半は明らか. 後半を証明する. ある整数 p を取ると, $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ ならば $d(x_m,\ x_n) \leqslant 1$ となる. $n \geqslant p$ なる x_n はすべて球 $\mathrm{B}(x_p,\ 1)$ に含まれる. $\mathbf{R} = \mathrm{Max}\{d(x_p,\ x_0),\ d(x_p,\ x_1),\ \cdots,\ d(x_p,\ x_{p-1}),\ 1\}$ と置けば, 球 $\mathrm{B}(x_p,\ \mathbf{R})$ は点列全体を含む. 終.

定理 49. コーシー列が集積点 a を持てば, その点列は a に収束する.

証明. x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$ をコーシー列, a をその集積点の一つとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある p を取ると, $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ なるかぎり $d(x_m,\ x_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. 一方, 無限に多くの m に対し, したがって p 以上の少なくとも一つの m に対して $d(x_m,\ a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる. だから, $n \geqslant p$ に対し, $d(x_n,\ a) \leqslant d(x_n,\ x_m) + d(x_m,\ a) \leqslant \varepsilon$ となる. 終.

系 1. コーシー列は, 収束してただ一つの集積点を持つか, または集積点を全然持たないかのいずれかである.

系 2. コーシー列のある部分列が収束すれば，もとの点列自身も収束する．

実際，このときコーシー列は集積点を持つことになる．

定義. 距離空間 E の任意のコーシー列が収束するとき，E は**完備**であると言う．

この節のはじめに，完備空間の概念がいかに役立つかということを見た．そこで，与えられた距離空間が完備であることを判定する方法が欲しくなる．

完備空間の概念は，距離空間でない位相空間に対しては意味を持たないことを注意しておく．さらに，二つの同値な距離に対してもコーシー列の概念は一致せず，したがって一方に関しては完備，一方に関しては非完備ということもありうる．完備空間の概念は距離的概念であって位相的概念ではない．

たとえば実数直線 **R** を考えよう．周知のように(あとでもう一度証明するが)，**R** は自然距離に関して完備である．そして，整数全体の列 **N** はこの距離空間ではコーシー列でない．一方，補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ に，77 ページに挙げた距離のどれか一つを与えておく．これから **R** に導入される距離は **R** の自然距離と同値である．しかし，この距離に関して **R** は完備でない．なぜなら，整数列 **N** は今度は $\overline{\mathbf{R}}$ のコーシー列である ($\overline{\mathbf{R}}$ において $+\infty$ に収束する) から **R** のコーシー列でもあるが，それは収束しない．

定理 50. 距離空間 E の閉球がすべてコンパクトならば E は完備である．とくに，コンパクト距離空間は完備である．有限次元ノルム線型空間も完備である．

証明. x_0, x_1, x_2, …, x_n, …を E のコーシー列とする．定理 48 によってこれは有界，したがってある閉球 B (これはコンパクト) に含まれる．ヴァイエルシュトラス=ボルツァノの定理によってそれは集積点を持つ．定理 49 によってそれは収束する．すなわち E は完備である． 終．

注意. 1° 定理の仮定により，このとき E は局所コンパクトである．しかし，局所コンパクト空間の閉球がいつもコンパクトであるとは限らない[*]．たとえば，77 ページの距離の一つを備えた $\overline{\mathbf{R}}$ を考えると，それから **R** への導入距離の定める位相は自然位相であるから，**R** は局所コンパクトである．しかしそれが完備でないことはさっき見た．実際，その閉球でコンパクトでないものが存在することはすぐに分る．$\overline{\mathbf{R}}$ はコンパクトゆえに有

---

*) 距離空間 E が局所コンパクトだという性質は位相的性質である．一方，E の閉球がすべてコンパクトだという性質は距離的性質である．

界だから，ρ を十分大きく取れば，$\overline{\mathbf{R}}$ 内の半径 ρ の閉球は $\overline{\mathbf{R}}$ 全体となる．したがって $\mathbf{R}$ 内の半径 ρ の閉球は $\mathbf{R}$ 全体となり，これはコンパクトでない．

2° 無限次元ノルム線型空間には完備なものも非完備なものもある．これらの例はあとで出てくる．もちろん興味のあるのは空間が完備な場合である．

3° 局所コンパクトでなく，しかも完備である空間も存在する．注意 2° の完備な無限次元ノルム空間がそうである．

4° コンパクト性と同様，距離空間の完備性も空間自身の性質である．距離空間 E の部分集合 F が完備である，と言ったら，それは E からの導入距離に関して距離空間 F が完備であることを意味する．

定理 51.　Eを距離空間，F を E の部分集合とする．F が完備ならばそれは E の閉集合である．

証明.　a を F の接触点とする．定理 15 により，F 内の列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ で a に収束するものがある．この列は E 内のコーシー列であるから F 内のコーシー列でもある．F は完備だから，それは F の点 a' に収束し，$a=a'$ となる．よって F は閉集合である．　終．

系 1.　E を距離空間，F を E と異なる E の部分集合とする．もし F が E 内で密であれば F は完備ではありえない．

証明.　実際，F の閉包は E で，F とは異なり，したがって F は閉集合でない．したがって，定理によって F は完備でない．　終．

とくに，有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は自然距離に関して完備でない．$\mathbf{Q}$ のコーシー列で収束しないものは簡単に作れる．それには $\mathbf{Q}$ の列で無理数に収束するものを取ればよいのである．我々が有理数体では満足することができず，実数体を導入しなければならないのは，まさに，実数体では成立つが有理数体では成立たない二つの性質，すなわち，上有界部分集合が上限を持つことおよびコーシー列がすべて収束すること，この二つのためなのである．

系 2.　ノルム線型空間の有限次元部分線型空間は閉集合である．

証明.　実際，定理 50 によってそれは完備，したがって閉集合である．　終．

この結果は，任意の（必ずしもノルムの付かない）位相線型空間に対しても成立つ．

定理 51 の逆はもちろん成立たない．たとえば空間 E 自身は E の閉集合であるが完備であるとは限らない．しかし，つぎの定理が成立つ．

定理 52.　完備距離空間の閉集合はすべて完備である．

証明.　E を完備距離空間，F を E の閉集合，x_0，x_1，x_2，…，x_n，…を F のコーシー列とする．それは E のコーシー列でもあるから，仮定により，E の点 a に収束する．定理 15 によって a は F に接触するが，F は閉集合だから，a は F に属する．したがって F は完備である．　終.

定理 51 と定理 52 とを合わせると，完備距離空間 E に対しては，その完備部分集合と閉部分集合とは同じものであることが分る．コンパクト空間に対する同様な性質との類似に注目せよ．

定理 53.　E_1，E_2 がともに完備距離空間ならば，積空間 $E_1 \times E_2$ は，49 ページに定義したどの距離についてもやはり完備である．

証明.　少し一般的な形で証明しよう．d_1，d_2 をそれぞれ E_1，E_2 の距離とし，δ を $E_1 \times E_2$ の距離でつぎの二性質を持つものとする：

1°　$E_1 \times E_2$ 上に δ の定める位相は，E_1，E_2 上にそれぞれ d_1，d_2 が定める位相の積位相である．

2°　ある数 k を取ると，$E_1 \times E_2$ の任意の二点 (x_1, x_2)，(y_1, y_2) に対して不等式

(11.3)　$$k\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geqslant \mathrm{Max}(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

が成立つ．

このような任意の δ に関して $E_1 \times E_2$ が完備であることを証明しよう．$E_1 \times E_2$ のコーシー列 $((x_1)_n, (x_2)_n)_{n \in \mathrm{N}}$ を考えると，仮定 2° により，列 $(x_1)_n$ は E_1 のコーシー列，列 $(x_2)_n$ は E_2 のコーシー列である．仮定により，これらの列はそれぞれ $a_1 \in E_1$，$a_2 \in E_2$ に収束する．よって，積位相に関して，すなわち距離 δ に関して列 $((x_1)_n, (x_2)_n)$ は点 (a_1, a_2) に収束し，$E_1 \times E_2$ は完備である．　終.

一様連続写像の延長

定理 54.　E，F を距離空間，E_1 を E の密部分空間，f_1 を E_1 から F への写像とする．f_1 が一様連続で F が完備ならば，E から F への連続写像 f で f_1 を延長したものがただ一つ存在する．f は一様連続でもある．

証明.　1°　f_1 は単に連続とし，F の完備性を仮定しなくても，f_1 を延長した連続写像は高々一つしか存在しない．実際，f が f_1 の延長である連続写像とする．E の任意の点 x に対し，E_1 が密だから，定理 15 によって E_1 の点列 x_0，x_1，x_2，…，x_n，…で x に収束するものがある．f の連続性と定理 16 とにより，列 $f(x_n) = f_1(x_n)$ は $f(x) \in$ F に収束する．すなわち，$f(x)$ は $f_1(x_n)$ よって決まってしまうから，f は存在しても高々一つである．

2°　f の存在を言うためには，f_1 の一様連続性と F の完備性とを仮定しなければならない．E の点 x に対し，E_1 の点列 x_0，x_1，x_2，…，x_n，…で x に収束するものを取

る．これは E のコーシー列であるから，簡単に分るように，列 $f_1(x_n)$ は F のコーシー列である．実際，任意の $\varepsilon>0$ に対し，一様連続性の仮定により，ある数 $\eta>0$ を取ると，x', $x''\in E_1$, $d(x', x'')\leqslant\eta$ なるかぎり $d(f_1(x'), f_1(x''))\leqslant\varepsilon$ となる．x_0, x_1, x_2, …, x_n, …はコーシー列だから，ある整数 p を取ると，$m\geqslant p$, $n\geqslant p$ なるかぎり $d(x_m, x_n)\leqslant\eta$ となり，$d(f_1(x_m), f_1(x_n))\leqslant\varepsilon$ となる．すなわち，列 $f_1(x_n)$ は F のコーシー列である．

F の完備性により，列 $f_1(x_n)$ は収束する．その極限を $f(x)$ と置く．まず，この値 $f(x)$ が x によって決まること，すなわち，x に収束する E_1 内の列 x_n の選びかたによらないことを言わなければならない．そこで，x'_n, x''_n がともに E_1 内の点列で x に収束するとすると，《混成列》 x'_0, x''_0, x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, …, x'_n, x''_n, … も E_1 内の点列で x に収束する．F の点列 $f(x'_0)$, $f(x''_0)$, $f(x'_1)$, $f(x''_1)$, …, $f(x'_n)$, $f(x''_n)$, …は収束するから，その二つの部分列 $f(x'_n)$, $f(x''_n)$ は同じ極限に収束する．よって $f(x)$ はちゃんと定義される．

こうして E から F への写像 f が定義された．これが f_1 の延長であることは明らかである．なぜなら，x が E_1 に属するならば，x に収束する E_1 内の点列として x, x, x, …, x, …を取ることができ，$f(x)$ は F の列 $f_1(x)$, $f_1(x)$, $f_1(x)$, …, $f_1(x)$, …の極限すなわち $f_1(x)$ になるからである．あとは f の一様連続性を証明すればよい．任意の $\varepsilon>0$ に対し，f_1 の一様連続性から決まる数 $\eta>0$ を取る（すなわち x, $y\in E_1$, $d(x, y)\leqslant\eta$ ならば $d(f_1(x), f_1(y))\leqslant\varepsilon$）．E の二点 x, y が $d(x, y)\leqslant\dfrac{\eta}{2}$ を充たすとして $d(f(x), f(y))\leqslant\varepsilon$ を言えばよい．x, y に収束する E_1 の点列 x_n, y_n を取る．距離関数の連続性（定理18）により，ある数 p を取ると，$n\geqslant p$ なるかぎり $d(x_n, y_n)\leqslant d(x, y)+\dfrac{\eta}{2}$ となる．よって，$n\geqslant p$ なるかぎり $d(x_n, y_n)\leqslant\eta$ となり，$d(f_1(x_n), f_1(y_n))\leqslant\varepsilon$ となる．点列 $f_1(x_n)$, $f_1(y_n)$ はそれぞれ $f(x)$, $f(y)$ に収束するから，F の距離関数の連続性により，$d(f_1(x_n), f_1(y_n))$ は $d(f(x), f(y))$ に収束する．よって $d(f(x), f(y))\leqslant\varepsilon$ が成立ち，f の一様連続性が証明された．　終．

注意.　1°　F の完備性は本質的な仮定である．たとえば $F=E_1$ で f_1 が恒等写像の場合を考えると，f_1 は E から E_1 への連続写像に延長されない（$E_1\neq E$ とする）．

実際，$x\in E$, $x\notin E_1$ に収束する E_1 の点列 x_n を取る．もし f_1 が f に延長されたとすると，列 $f_1(x_n)=x_n$ は $f(x)\in E_1$ に収束し，$f(x)=x$ となって不合理である．

2°　f_1 の一様連続性も本質的な仮定であり，連続性だけでは不十分である．たとえば $E=\overline{\mathbf{R}}$ に定理 47 の距離の一つを入れたものとし，$E_1=\mathbf{R}$ とする．F として自然距離を備えた $\mathbf{R}$ を取る．E_1 から F への恒等写像 f_1 は連続であるが一様連続ではない．そして，f_1 は $E=\overline{\mathbf{R}}$ から $F=\mathbf{R}$ への連続写像に延長されない．なぜなら，もし延長 f があったとし，$E=\overline{\mathbf{R}}$ の点 $x=+\infty$ を考える．整数列 $\mathbf{N}$ は E において $+\infty$ に収束するが，その像の列すなわち同じ整数列 $\mathbf{N}$ は $F=\mathbf{R}$ においては収束しない．一方それは $f(+\infty)$ に収束しなければならない．

有限次元の位相線型空間に特有な性質

この種の性質にはすでに遭遇した． 定理 13, 定理 25, 定理 51 の系 2 等がそうであった．ここでは，57 ページで予告した性質を証明する．

定理 55 (F. リエス). 位相線型空間が局所コンパクトであるのは，それが有限次元のときだけである．

証明. 簡単のために E はノルム線型空間であるとする．一般の結果を得るにはほんのちょっと補正すればよい．さて，有限次元線型空間が局所コンパクトであることはすでに知っているから，この逆をこれから証明する．位相線型空間 E の原点 0 がコンパクト近傍 $\mathscr{V}$ を持つとする．つぎの記号を使うことにする：E の部分集合 A とスカラー λ とに対し，集合 $\{\lambda x\,;x\in A\}$ を λA と書き，E の部分集合 A，B に対し，集合 $\{x+y\,;x\in A,\ y\in B\}$ を $A+B$ と書く（注意：2A は $A+A$ に含まれるが一般に一致しない）．E の部分集合 M が部分線型空間であるのは，$M+M=M$，$\lambda M\subset M$（λ は任意のスカラー）が成立つときである．この記号を使うと，$2\mathscr{V}$ も 0 の近傍である．E の元 a に対し，$a+\mathscr{V}$ は a の近傍であり，$a+\mathring{\mathscr{V}}$ は a の開近傍である． a が $2\mathscr{V}$ 全体を動くとき，$a+\mathring{\mathscr{V}}$ の全体は $2\mathscr{V}$ の開被覆となる．$2\mathscr{V}$ もコンパクトだから，$2\mathscr{V}$ の有限個の元 a_1，a_2，…，a_n を適当に選ぶと，$a_i+\mathring{\mathscr{V}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ だけで $2\mathscr{V}$ を覆う．n個の元 a_1，a_2，…，a_n の生成する部分線型空間を M とすると，M は有限次元で，$M+\mathscr{V}$ は $2\mathscr{V}$ を含む．

$M+\mathscr{V}=M+M+\mathscr{V}\supset M+2\mathscr{V}$ が成立ち，さらに，$M+\mathscr{V}\supset M+2\mathscr{V}=2M+2\mathscr{V}=2(M+\mathscr{V})\supset 2(M+2\mathscr{V})=2M+4\mathscr{V}=M+4\mathscr{V}$ となる．この操作を続けると，任意の n に対して，$M+\mathscr{V}\supset M+2^n\mathscr{V}\supset 2^n\mathscr{V}$ が成立つ．ところが $2^n\mathscr{V}$ すべての合併は E 全体だから，$M+\mathscr{V}$ も E 全体である． これから M がすでに E 全体に一致することが言え， よって E は有限次元となる． 実際， もし $M\neq E$ とすると M に属さない E の元 a が存在する．M は閉集合だから（定理 51 の系 2）， a を中心とする球で M と交わらないものがある．この球を $a+B$ と書く．ただし B は原点を中心とする球である．そして，$M+B$ は a を含まない．よって，任意の $\rho>0$ に対し，$M+\rho B=\rho M+\rho B$ は ρa を含まない：$\rho a\notin M+\rho B$．ところが $\mathscr{V}$ はコンパクトゆえに有界であるから，ρ を十分大きく取れば ρB に含まれる． したがって ρa は $M+\mathscr{V}$ に属さないことになり，$M+\mathscr{V}=E$ に反する． 終．

§ 12. 不動点定理

定義. E を距離空間， f を E から E への写像とする． ある正数 $k<1$ が存在して，E の任意の二点 x，y に対して不等式

(12.1) $$d(f(x),\ f(y))\leqslant kd(x,\ y)$$

が成立つとき，f は**縮小写像**であると言う．

これからすぐ分るように，f はリプシッツ連続であり，　したがって一様連続である．写像 f に対して $f(a)=a$ となる点 a を f の**不動点**と言う．

定理 56.　　完備距離空間 E から E 自身への縮小写像はつねにただ一つの不動点を持つ．

証明.　　E が完備でなくても，　不動点が高々一つしか存在しないことは明らかである．実際，もし a, $b\,(a \neq b)$ がともに f の不動点ならば，$d(a, b) \neq 0$ だから，

$$d(a, b) \leqslant kd(a, b) < d(a, b) \tag{12.2}$$

となってしまう．

不動点の存在を証明しよう．**逐次近似法**と呼ばれる方法による．E の任意の点 x_0 から始めて，つぎつぎに

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \cdots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \cdots \tag{12.3}$$

と置く．こうして得られる E の点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ がコーシー列であることを示そう．f は縮小写像だから，つぎの一連の不等式が得られる：

$$\begin{cases} d(x_2, x_1) \leqslant kd(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) \leqslant kd(x_2, x_1) \leqslant k^2 d(x_1, x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0). \end{cases} \tag{12.4}$$

これからつぎの不等式が得られる：

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k + 1)k^n d(x_1, x_0) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{12.5}$$

したがって，p が何であっても，n が $+\infty$ に近づけば $d(x_{n+p}, x_n)$ は 0 に近づく．すなわち列 x_n はコーシー列である．E はいま完備だから列 x_n はある点 a に収束する．f は連続だから，$x_{n+1} = f(x_n)$ の両辺はそれぞれ a, $f(a)$ に近づき，　$f(a)=a$ が得られる．よって a は f の不動点である．この証明法は不動点の存在ばかりでなく，それを見つける実用的な方法でもある．　終．

列 x_n は急速に収束する．実際，

$$d(x_n, a) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0). \tag{12.6}$$

注意.　　1°　仮定 $k<1$ は絶対欠かせない．$k \leqslant 1$ としたのでは，不動点の存在も一意性も証明できない．たとえば任意の距離空間の恒等写像は $k=1$ に対する不等式 (12.1) も充たすが，このときはすべての点が不動点である．一方，直線上の平行移動 $x \to x+1$ も $k=1$ に対する不等式 (12.1) を充たすが不動点はない．

2°　E から E への写像 f 自身が縮小写像でなくても，そのある巾 f_p が縮小写像なら

ば，f はやはりただ一つの不動点を持つ．ただし，f の巾とは，公式

(12.7)　$$f_2=f\circ f,\ f_3=f\circ f\circ f,\ \cdots,\ f_p=f\circ f_{p-1}=f_{p-1}\circ f$$

によって帰納的に定義される写像である．

証明.　まず一意性から．f の不動点は f の任意の巾の不動点でもある．その一つ f_p がただ一つしか不動点を持たないのだから，f も高々一つしか不動点を持たない．つぎに存在を証明するため，f_p のただ一つの不動点を a とする．点 $f_{p+1}(a)$ は二通りに，$f(f_p(a))=f(a)$ とも $f_p(f(a))$ とも書ける．これは $f(a)$ も f_p の不動点であることを示す．一意性によって $f(a)=a$ となる，すなわち a は f の不動点である．　終.

この不動点を求めるのには，前と同じ逐次近似法が使える．実際，(12.3) によって定まる点列 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ は不動点 a に収束する．なぜなら，この点列を p 個おきに取って得られる p 個の部分列

$$x_0,\ x_p,\ x_{2p},\ \cdots,\ x_{np},\ \cdots;\ x_1,\ x_{p+1},\ x_{2p+1},\ \cdots,\ x_{np+1},\ \cdots;\ \cdots;$$
$$x_{p-1},\ x_{2p-1},\ x_{3p-1},\ \cdots,\ x_{np+p-1},\ \cdots$$

は，どれも関数 f_p に (12.3) を適用して得られた列だから a に収束する．したがってそれらの混成列であるもとの点列も a に収束する（巾 f_p が縮小写像だからと言って，もとの f が必ずしも連続と限らないことは注意を要する）．

つぎに，径数 λ にある意味で連続に依存する縮小写像の族 f_λ があるとき，それぞれの不動点 a_λ が λ に連続に依存するかどうかを見よう．

定理 57.　E を完備距離空間，Λ を位相空間，f を $\mathrm{E}\times\Lambda$ から E への写像とする．E の点 x を任意に固定したとき，偏写像 $\lambda\mapsto f(x,\ \lambda)$ が Λ から E への連続写像であると仮定する．さらに，各 $\lambda\in\Lambda$ に対し偏写像 $f_\lambda: x\mapsto f(x,\ \lambda)$ が，λ によらない共通の $k<1$（公式 (12.1) 参照）に対応する，E から E への縮小写像であると仮定する．各 f_λ のただ一つの不動点 a_λ は径数 λ に連続に依存する，すなわち，Λ から E への写像 $\lambda\mapsto a_\lambda$ は連続である．

証明.　Λ の点 λ_0 および $\varepsilon>0$ が与えられたとする．不等式

(12.8)　$$d(a_\lambda,\ a_{\lambda_0})=d(f_\lambda(a_\lambda),\ f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0}))\leqslant d(f_\lambda(a_\lambda),\ f_\lambda(a_{\lambda_0}))$$
$$+d(f_\lambda(a_{\lambda_0}),\ f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0}))\leqslant kd(a_\lambda,\ a_{\lambda_0})+d(f(a_{\lambda_0},\ \lambda),\ f(a_{\lambda_0},\ \lambda_0))$$

から，

$$(1-k)d(a_\lambda,\ a_{\lambda_0})\leqslant d(f(a_{\lambda_0},\ \lambda),\ f(a_{\lambda_0},\ \lambda_0))$$

が得られる．$x=a_{\lambda_0}$ を固定したときの λ に関する f の連続性により，λ_0 の Λ における近傍 $\mathscr{V}$ を適当に取ると，$\lambda\in\mathscr{V}$ に対して $d(f(a_{\lambda_0},\ \lambda),\ f(a_{\lambda_0},\ \lambda_0))\leqslant\varepsilon(1-k)$ が成立つ．したがって，$\lambda\in\mathscr{V}$ ならば $d(a_\lambda,\ a_{\lambda_0})\leqslant\varepsilon$ となり，これは問題の写像 $\lambda\mapsto a_\lambda$ が λ_0 において連続なことを示す．終.

§ 13. ノルム線型空間およびバナハ空間の基礎理論

今後 **K** はつねに実数体または複素数体の一方を表わすものとする*). E, F を **K** 上のノルム線型空間（ノルム空間と略称する）とし, u を E から F への写像とする. u が線型写像だと言うのは, $\lambda \in \mathbf{K}$, $\vec{x} \in \mathrm{E}$, $\vec{y} \in \mathrm{E}$ に対して

(13. 1)
$$u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}),\quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$$

が成立つことであった.

E が有限次元ならば, E から F への線型写像はすべて連続, しかもリプシッツ連続であり, したがって一様連続である.

証明.　E 上のノルムはどれもたがいに同値だから（定理13）, リプシッツ連続性したがって一様連続性を示すために, E の基底 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ を固定し, ベクトル $\vec{x}$ の座標が x_1, x_2, …, x_n であるとき, $\|\vec{x}\| = \underset{i=1,2,\cdots,n}{\mathrm{Max}} |x_i|$ によってノルムが定まっているとしてよい**). すると,

$$\|u(\vec{x}') - u(\vec{x}'')\| = \|u(\vec{x}' - \vec{x}'')\| = \left\|u\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')\vec{e}_i\right)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')u(\vec{e}_i)\right\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|u(\vec{e}_i)\|\right) \underset{i=1,2,\cdots,n}{\mathrm{Max}} |x_i' - x_i''| \leqslant k\|\vec{x}' - \vec{x}''\|$$

となり, u はリプシッツ連続, したがって一様連続である.　終.

E が無限次元のときはこうは行かない.　奇妙に思えるかもしれないが, 不連続な線型写像が存在するのである.

例を挙げよう. 実係数多項式全体の実線型空間を E とする***). ノルムを

(13. 2)
$$\|\mathrm{P}\| = \underset{0<x<1}{\mathrm{Max}} |\mathrm{P}(x)|$$

によって定める. [0, 1] はコンパクト, P は連続だから, 定理 31 により, た

*) 複素数体上のノルム空間は必然的に実数体上のノルム空間でもある. 以下, E, F の一方が実ノルム空間, 一方が複素ノルム空間のときは, 両方とも実ノルム空間として考える. E と F との中立元（原点）は一般に異なるものであるが, それを同じ記号 $\vec{0}$ で表わす. 任意の線型写像 u に対して $u(\vec{0})=\vec{0}$ となる. さらに, E, F のノルムをともに同じ記号で表わす.

**) 連続性は位相的性質であって距離的性質ではない. しかし, 一様連続性は距離的性質である. だが, 定理 12 によれば, ノルム空間からノルム空間への写像が一様連続であることを言うときには, ノルムをそれぞれ同値なノルムで置換えてもよいわけである.

***) 加法とスカラー乗法は周知のものである. E は線型空間で, 恒等的に零なる多項式が E の零元 $\vec{0}$ である. m 次以下の多項式全体は $m+1$ 次元空間を作る. たとえば 1, x, x^2, …, x^m がその基底となる. 多項式全体の空間はしたがって無限次元である.

しかに最大値が存在する．これは E のノルムである．実際，$\lambda \in \mathbf{R}$ に対して明らかに $\|\lambda P\| = |\lambda|\|P\|$ が成立ち，P，$Q \in E$ に対して $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$ が成立つ．さらに，$P \neq 0$ ならば $\|P\| > 0$ である．もし $\|P\| = 0$ ならば P は区間 〔0, 1〕 上恒等的に零だから $P \equiv 0$ になる．よって $\|\ \ \|$ はノルムである．E 上の実数値関数 u を，各多項式 P にその $x = 3$ での値を対応させて定める：$u(P) = P(3)$．　u は明らかに E 上の線型形式（すなわち $\mathbf{R}$ への線型写像）である．しかし，u は連続でない．実際，多項式の列 P_n を

(13. 3)
$$P_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

で定めると，$\|P_n\| = \dfrac{1}{2^n}$ だから，列 P_n は $\vec{0}$ に収束する．一方，$P_n(3) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ だから，実数列 $u(P_n)$ は $+\infty$ に近づく（収束しない）．したがって u は連続でない．

定理 58.　E, F をノルム空間，u を E から F への線型写像とする u はもし原点で連続ならばいたるところ連続である．さらにそれはリプシッツ連続，したがって一様連続でもある．u が連続であるためには，適当な定数 $k \geqslant 0$ に対して，

(13. 4)
$$\|u(\vec{x})\| \leqslant k\|\vec{x}\| \qquad (\forall \vec{x} \in E)$$

が成立つことが必要十分である．

証明.　まず，u が原点で連続だと仮定して，(13. 4) が成立つような k が存在することを言う．原点での連続性により，ある数 $\eta > 0$ を取ると，$\|\vec{x}\| \leqslant \eta$ なるかぎり $\|u(\vec{x})\| \leqslant 1$ となる．u は線型だから，λ 倍して，$\|\vec{x}\| \leqslant \lambda\eta$ ならば $\|u(\vec{x})\| \leqslant \lambda$ が成立つ．この最初の不等式で $\lambda = \dfrac{\|\vec{x}\|}{\eta}$ としたものはいつでも成立つから，任意の $\vec{x}$ に対して $\|u(\vec{x})\| \leqslant \dfrac{1}{\eta}\|\vec{x}\|$ が成立つ．$k = \dfrac{1}{\eta}$ とすれば (13. 4) が得られる．逆に (13. 4) を成立させるような k が存在すれば，u は明らかに原点で連続であるが，さらに u の線型性により，

(13. 5)
$$\|u(\vec{x}') - u(\vec{x}'')\| = \|u(\vec{x}' - \vec{x}'')\| \leqslant k\|\vec{x}' - \vec{x}''\|$$

となるから，いたるところリプシッツ連続である．　終.

注意.　この定理は特別な場合として定理 12 を含んでいる．なぜなら，線型空間 E 上の二つのノルムが同値だと言うのは，E にその一方のノルムを備えたノルム空間から，E にもう一方のノルムを備えたノルム空間への恒等写像およびその逆写像（これも恒等写像）がともに連続だと言うことにほかならない．そして，(13. 4) から (4. 1) が導かれる．

連続線型写像の核および像

E, F を体 **K** 上の線型空間，u を E から F への線型写像とする．

E の元 $\vec{x}$ で $u(\vec{x})=\vec{0}$ となるものの全体，すなわち F の $\vec{0}$ の逆像 $u^{-1}(\{\vec{0}\})$ を u の**核**と言う．これは E の部分線型空間である．なぜなら，$\vec{x}$, $\vec{y}$ が核に属すれば，$u(\vec{x})=\vec{0}$, $u(\vec{y})=\vec{0}$ だから，$u(\vec{x}+\vec{y})=u(\vec{x})+u(\vec{y})=\vec{0}$ となり，$\vec{x}+\vec{y}$ も核に属する．またスカラー λ に対し，$u(\lambda\vec{x})=\lambda u(\vec{x})=\vec{0}$ だから，$\lambda\vec{x}$ も核に属する．

E の u による像 $u(\mathrm{E})$ を u の**像**と言う．これは F の部分線型空間である．u の像の次元を u の**階数**と言う．E, F がともに有限次元のとき，それぞれの基底を選ぶと，u は行列で表わされるのであった．そして，線型写像 u の階数は，この行列の 0 でない小行列式の最高次数に等しい．さらに，u の階数は，E の次元と u の核の次元との差に等しい．これらはすでに学んだことである．

E, F がノルム空間で u が連続の場合，u の核は E の閉部分線型空間である．実際，核は一点から成る集合の逆像であり，一点集合は F の閉集合だからである（定理 8）．像は必ずしも閉集合でない*)．

定義．　線型写像 u に対して不等式（13.4）を成立させるような数 k の下限を u の**ノルム**と言い，$\|u\|$ と書く**)．$\|u\|$ はつぎの式によって定義される：

(13.6)
$$\|u\|=\sup_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\|u(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}=\sup_{\substack{\|\vec{x}\|\leqslant 1\\ \vec{x}\neq\vec{0}}}\|u(\vec{x})\|=\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|u(\vec{x})\|.$$

またつねにつぎの不等式が成立つ：

(13.7)
$$\|u(\vec{x})\|\leqslant\|u\|\|\vec{x}\|.$$

定理 59．　E, F がノルム空間であるとき，E から F への連続線型写像の全体を $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ とすると，（13.6）で定まるノルムによって，$\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ はノルム空間になる．さらに，G がもう一つのノルム空間のとき，$u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$, $v\in\mathscr{L}(\mathrm{F};\mathrm{G})$ ならば，$v\circ u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})$ であるが，これに対して不等式

(13.8)
$$\|v\circ u\|\leqslant\|v\|\|u\|$$

が成立つ．

証明．　まず $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ が $\mathbf{K}$ 上の線型空間の構造を持つことを示そう．$\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ の二元 u_1, u_2 に対してその和 u_1+u_2 を，E から F への写像として，

(13.9)
$$(u_1+u_2)(\vec{x})=u_1(\vec{x})+u_2(\vec{x})$$

---

*) 連続写像による閉部分集合の順像は必ずしも閉集合にならない！

**) もちろん，これは u が連続の場合に限って定義される．不連続な u に対しては $\|u\|=+\infty$ と置く．また，（k の）下限は実は最小値であることに注意しよう．

で定義すると，u_1+u_2 は E から F への線型写像であり，(13.7) から不等式

(13.10)　$$\|(u_1+u_2)(\vec{x})\| \leqslant \|u_1(\vec{x})\| + \|u_2(\vec{x})\| \leqslant (\|u_1\|+\|u_2\|)\|\vec{x}\|$$

が導かれ，よって u_1+u_2 は連続である，すなわち，$u_1+u_2 \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$．さらに (13.6) により，

(13.11)　$$\|u_1+u_2\| \leqslant \|u_1\|+\|u_2\|$$

が得られる．これで $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ に加法が定義され，それによって $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ はアーベル群（可換群）になった．この群の単位元は**零写像**あるいは単に 0 と呼ばれるもの，すなわち E のあらゆる元を F の $\vec{0}$ に移す写像である．

つぎに，$\lambda \in \mathbf{K}$, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ に対し，λu を，E から F への写像として，

(13.12)　$$(\lambda u)(\vec{x}) = \lambda(u(\vec{x}))$$

によって定める．λu は E から F への線型写像であり，不等式

(13.13)　$$\|(\lambda u)(\vec{x})\| = |\lambda|\,\|u(\vec{x})\| \leqslant |\lambda|\,\|u\|\,\|\vec{x}\|$$

により，λu は連続である．すなわち $\lambda u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$．さらに，等式

(13.14)　$$\|\lambda u\| = \operatorname*{Sup}_{\|\vec{x}\|=1}\|(\lambda u)(\vec{x})\| = |\lambda| \operatorname*{Sup}_{\|\vec{x}\|=1}\|u(\vec{x})\|$$

言換えれば，

(13.15)　$$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$$

が得られる．

以上で $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ に加法とスカラー乗法が定義された．これらの算法に関して $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ が $\mathbf{K}$ 上の線型空間になることは簡単に分る．さらに，(13.11) および (13.15) の示すように，写像 $u \mapsto \|u\|$ はノルムである（不等式 (13.7) により，$\|u\|=0$ ならば $u=0$ となる）．よって $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ はノルム空間である．

つぎに，$u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$, $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F};\mathrm{G})$ ならば当然 $v \circ u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})$ であるが*)，$\|(v\circ u)(\vec{x})\| \leqslant \|v\|\,\|u(\vec{x})\| \leqslant \|v\|\,\|u\|\,\|\vec{x}\|$ から $\|v\circ u\| \leqslant \|v\|\,\|u\|$ が得られ，これは求める不等式 (13.8) である．　終．

とくに $\mathrm{F}=\mathbf{K}$ のとき，E から $\mathbf{K}$ への線型写像を E 上の**線型形式**と言う．E 上の連続線型形式の全体はしたがってノルム空間である**)．これを E の**双対空間**と言い，E′ で表わす．

記号.　$u \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$, $\vec{x} \in \mathrm{E}$ のとき，$\vec{x}$ の u による像 $u(\vec{x})$ を $u\cdot\vec{x}$ または単に $u\vec{x}$ と書くと都合がよい．また，$v\circ u$ のかわりに $v\cdot u$ または vu と

---

*) 線型写像の合成は線型であり，連続写像の合成は連続である（定理 10)．

**) 代数学においては，すなわち位相を考えない場合には，線型空間 E の双対空間と言ったら，それは E 上のあらゆる線型形式全部のつくる線型空間を意味する．E が有限次元ならば，この定義は我々の定義と一致する．なぜなら，この場合，線型形式はすべて連続であるから (86 ページ)．E が無限次元ノルム空間の場合，二つの定義は一致しないが，連続でない線型形式は重要でないので，《双対》という言葉は連続線型形式全体の空間に当てる方が適当である．

書くことにすれば，$(v\circ u)(\vec{x})=v(u(\vec{x}))$ は，$(v\cdot u)\cdot\vec{x}$，$v\cdot(u\cdot\vec{x})$，$v\cdot u\cdot\vec{x}$，$vu\vec{x}$ 等のように書かれる．$\mathrm{F}=\mathrm{E}$，$u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ のとき，$u\circ u$ は u^2，$u\circ u\circ u$ は u^3 等々と書く．

定理 60.　E, F をノルム空間，E_1 を E の密部分線型空間，u_1 を E_1 から F への連続線型写像とする．F が完備ならば，E から F への連続写像 u で u_1 を延長したものがただ一つ存在する．この写像 u は線型であり，$u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ のノルムは $u_1\in\mathscr{L}(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ のノルムに等しい．

証明.　u_1 は連続線型写像だから一様連続である（定理58）．定理 54 により，E から F への連続写像 u で u_1 を延長したものがただ一つ存在する．まず u が線型であることを示そう．$\vec{x},\vec{y}\in\mathrm{E}$，$\lambda\in\mathbf{K}$ とし，$\vec{x}_0$，$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，…，$\vec{x}_n$，… および $\vec{y}_0$，$\vec{y}_1$，$\vec{y}_2$，…，$\vec{y}_n$，… を E_1 の点列でそれぞれ $\vec{x}$，$\vec{y}$ に収束するものとする．E は位相線型空間（51 ページ）だから，点列 $\vec{x}_n+\vec{y}_n$ は $\vec{x}+\vec{y}$ に，点列 $\lambda\vec{x}_n$ は $\lambda\vec{x}$ にそれぞれ収束する．すると，

$$
(13.16)\quad\begin{cases}
u(\vec{x}+\vec{y})=\lim\limits_{n\to\infty}u_1(\vec{x}_n+\vec{y}_n)^{1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\ (u_1(\vec{x}_n)+u_1(\vec{y}_n))^{2)}\\
\qquad\qquad=\lim\limits_{n\to\infty}u_1(\vec{x}_n)+\lim\limits_{n\to\infty}u_1(\vec{y}_n)^{3)}=u(\vec{x})+u(\vec{y})^{4)}\\
u(\lambda\vec{x})=\lim\limits_{n\to\infty}u_1(\lambda\vec{x}_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda u_1(\vec{x}_n)=\lambda\lim\limits_{n\to\infty}u_1(\vec{x}_n)=\lambda u(\vec{x}).
\end{cases}
$$

したがって u は線型写像である．

つぎに $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ のノルムが $u_1\in\mathscr{L}(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ のノルムに等しいことを示そう．ノルムの定義式 (13.6) により，$\|u_1\|\leqslant\|u\|$ は明らかである．さらに，$\vec{x}\in\mathrm{E}$ が E_1 の点列 $\vec{x}_n$ の極限ならば，$u(\vec{x})$ は点列 $u_1(\vec{x}_n)$ の極限である．不等式 $\|u_1(\vec{x}_n)\|\leqslant\|u_1\|\|\vec{x}_n\|$ とノルムの連続性（定理 9）とから，極限に移行することによって $\|u(\vec{x})\|\leqslant\|u_1\|\|\vec{x}\|$ を得，したがって $\|u\|\leqslant\|u_1\|$，よって $\|u\|=\|u_1\|$．　終.

系.　定理の条件のもとで（すなわち E_1 は E で密，F は完備），二つのノルム空間 $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ と $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ とは同一視される．

証明.　任意の $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ に対し，u の E_1 への制限 u_1 は $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ に属し，$u\longmapsto u_1$ は $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ から $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ への双射であって，しかも線型空間の構造およびノルムを保つ．これが定理の内容であった．よってこの二つのノルム空間は同一視される．
終.

定義.　**K** 上の完備ノルム空間を**バナハ空間**と言う．

有限次元ノルム空間はすべてバナハ空間である（79 ページ，定理50）．

---

1) $\vec{x}_n+\vec{y}_n$ が $\vec{x}+\vec{y}$ に近づき，u が u_1 を延長した連続写像だから．

2) u_1 が線型だから．

3) F が位相線型空間だから．

4) u が u_1 を延長した連続写像だから．

定理 61. E がノルム空間, F がバナハ空間ならば, $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ もバナハ空間である. とくに E の双対空間 E′ はバナハ空間である.

証明. $\mathrm{E}'=\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathbf{K})$ で **K** はバナハ空間だから, 最初の部分だけを証明すればよい. u_0, u_1, u_2, …, u_n, … を $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ のコーシー列とする. すなわち m, n がともに $+\infty$ に近づくと, $\|u_m-u_n\|$ は 0 に近づく. 任意の $\vec{x}\in\mathrm{E}$ を固定すると, $\|u_m(\vec{x})-u_n(\vec{x})\|\leqslant\|u_m-u_n\|\|\vec{x}\|$ だから, $u_n(\vec{x})$ は F のコーシー列である. F は完備と仮定してあるから, この列は F のある元に収束する. その元を $u(\vec{x})$ と書く. こうして E から F への写像 $u:\vec{x}\mapsto u(\vec{x})$ が定義された.

まず u が線型写像であることを示そう. $\vec{x},\vec{y}\in\mathrm{E}$, $\lambda\in\mathbf{K}$ に対し,

$$
(13.17)\quad \begin{cases} u(\vec{x}+\vec{y})=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(\vec{x}+\vec{y})^{1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n(\vec{x})+u_n(\vec{y}))^{2)} \\ \qquad\qquad=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(\vec{x})+\lim\limits_{n\to\infty}u_n(\vec{y})=u(\vec{x})+u(\vec{y}), \\ u(\lambda\vec{x})=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(\lambda\vec{x})^{1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda u_n(\vec{x})^{2)}=\lambda\lim\limits_{n\to\infty}u_n(\vec{x})^{3)}=\lambda u(\vec{x}) \end{cases}
$$

となるから u はたしかに線型写像である.

つぎに u が連続なことを示そう. コーシーの判定法により, ある整数 p を取ると, $m\geqslant p$, $n\geqslant p$ なる限り $\|u_m-u_n\|\leqslant\varepsilon$ となる. したがって, $m\geqslant p$, $n\geqslant p$ に対して $\|u_m\|\leqslant\|u_n\|+\varepsilon$ が成立つ. さらに, これらの不等式から

$$(13.18)\qquad \|u_m(\vec{x})-u_n(\vec{x})\|\leqslant\varepsilon\|\vec{x}\|,$$

$$(13.19)\qquad \|u_m(\vec{x})\|\leqslant(\|u_n\|+\varepsilon)\|\vec{x}\|$$

が導かれる. 最後の式で $n\geqslant p$ と $\vec{x}$ とを固定して m を $+\infty$ に近づけると,

$$(13.20)\qquad \|u(\vec{x})\|\leqslant(\|u_n\|+\varepsilon)\|\vec{x}\|$$

が得られる. よって u は連続, $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ となる. つぎに式 (13.18) で, やはり $n\geqslant p$ と $\vec{x}$ とを固定して m を $+\infty$ に近づけると,

$$(13.21)\qquad \|u(\vec{x})-u_n(\vec{x})\|\leqslant\varepsilon\|\vec{x}\|$$

が得られ, したがって

$$(13.22)\qquad \|u-u_n\|\leqslant\varepsilon$$

となり, n を $+\infty$ に近づけると, ノルム空間 $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ において u_n は u に近づく. よって $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ は完備である. 終.

ノルム線型空間の積

E_1, E_2 を体 **K** 上の線型空間とする. 積集合 $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2$ に線型空間の構造が入ることはすでに知っている. すなわち, $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2$ の元 $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ に対し,

$$(13.23)\qquad (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)+(\vec{y}_1,\ \vec{y}_2)=(\vec{x}_1+\vec{y}_1,\ \vec{x}_2+\vec{y}_2)$$

と置き, $\lambda\in\mathbf{K}$ に対しては

---

1) u の定義による.

2) u_n の線型性による.

3) F が位相線型空間だから.

(13.24)
$$\lambda(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) = (\lambda\vec{x}_1,\ \lambda\vec{x}_2)$$
と置くと $E_1 \times E_2$ は $\mathbf{K}$ 上の線型空間になるのであった.

とくに, $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ は, $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ をそれぞれ $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 上の線型空間と考えたもの n 個の積線型空間にほかならない.

積線型空間 $E_1 \times E_2$ には, 二つの特別な部分線型空間がある. $(x_1,\ \vec{0})$ の形の元の全体 $A_1 = E_1 \times \{\vec{0}\}$ および $(\vec{0},\ \vec{x}_2)$ の形の元の全体 $A_2 = \{\vec{0}\} \times E_2$ である. この二つは, たがいに他の《**補空間**》である. すなわち, $E_1 \times E_2$ の任意の元 $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)$ は, A_1 の元と A_2 の元との和として一意的に表わされる : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1,\ \vec{0}) + (\vec{0},\ \vec{x}_2)$.

一般に, 線型空間の二つの部分空間がたがいに補空間であるとき, もとの空間はこれら二つの部分空間の**直和**であると言い, それを表わすために記号 $\oplus$ を使う. これを積線型空間に適用すれば,

(13.25)
$$E_1 \times E_2 = E_1 \times \{\vec{0}\} \oplus \{\vec{0}\} \times E_2$$
となる.

つぎに E_1, E_2 がともにノルム空間だとし, ノルムをそれぞれ $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ で表わす. このとき, 積空間 $E_1 \times E_2$ にノルムを入れることはできるが, その入れ方はいろいろあり, そのうちのどれか一つがとくに自然だとか重要だとかいうことはない. たとえば, つぎの三つのノルムはどれも同値である :

(13.26)
$$\|(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)\| = \mathrm{Max}(\|\vec{x}_1\|_1,\ \|\vec{x}_2\|_2)$$
$$\text{または } \|\vec{x}_1\|_1 + \|\vec{x}_2\|_2 \text{ または } \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2}.$$

このうちのどのノルムが $E_1 \times E_2$ 上に定める位相も積位相である. また, 上述のたがいに補な部分空間 $E_1 \times \{\vec{0}\}$, $\{\vec{0}\} \times E_2$ はともに $E_1 \times E_2$ の閉部分空間である. 以後, とくに断わらないかぎり, $E_1 \times E_2$ 上には上記三種のノルムのうちの一つが備わっていると考え, E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ のノルムをどれも同じ記号 $\|\ \|$ で表わす.

定理 62.　E_1, E_2, F をノルム空間とする. $E_1 \times E_2$ から F への任意の連続線型写像 u は, 必ずただ一通りにつぎの形に書くことができる :

(13.27)
$$u(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2).$$

ただし, u_1, u_2 はそれぞれ E_1, E_2 から F への連続線型写像である. 逆に u_1, u_2 がそれぞれ E_1, E_2 から F への連続線型写像のとき, (13.27) によって定まる写像 u は $E_1 \times E_2$ から F への連続線型写像である.

証明.　まず u が与えられているとする. E_1 から F への写像 u_1 をつぎのように定める : $\vec{x} \in E_1$ に対し, $u_1(\vec{x}_1) = u(\vec{x}_1,\ \vec{0})$. 同様に E_2 から F への写像 u_2 を定める. u_1,

u_2 は明らかに線型写像である．これらは連続でもある．実際，

(13.28) $$\|u_1(\vec{x}_1)\| = \|u(\vec{x}_1, \vec{0})\| \leqslant \|u\|\|(\vec{x}_1, \vec{0})\| = \|u\|\|\vec{x}_1\|$$

となるからである．これからさらにつぎの不等式が得られる：

(13.29) $$\|u_1\| \leqslant \|u\|, \qquad \|u_2\| \leqslant \|u\|.$$

しかも明らかに，

(13.30) $$u(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = u(\vec{x}_1, \vec{0}) + u(\vec{0}, \vec{x}_2)^{*)} = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2)$$

が成立つから，式 (13.27) を充たす u_1，u_2 の存在が証明された．

このような表示が一つしかないことを示そう．実際，v_1，v_2 がそれぞれ E_1，E_2 から F への線型写像で，$u(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = v_1(\vec{x}_1) + v_2(\vec{x}_2)$ が成立つとすると，$u(\vec{x}_1, \vec{0}) = v_1(\vec{x}_1)$ から $v_1 = u_1$ が得られ，同様に $v_2 = u_2$ が得られる．

逆に，u_1，u_2 がそれぞれ E_1，E_2 から F への線型写像であるとき，(13.27) によって u を定めると，まず u は明らかに線型である．さらに，不等式

(13.31) $$\|u(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\| \leqslant \|u_1(\vec{x}_1)\| + \|u_2(\vec{x}_2)\| \leqslant \|u_1\|\|\vec{x}_1\| + \|u_2\|\|\vec{x}_2\|$$
$$\leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|)\mathrm{Max}(\|\vec{x}_1\|, \|\vec{x}_2\|) \leqslant (\|u_1\| + \|u_2\|)\|(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\|$$

によって u は連続でもある．　終．

最後の不等式とノルムの定義とからつぎの不等式が得られる：

(13.32) $$\|u\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|.$$

n 個のノルム空間 E_1，E_2，…，E_n の積集合 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ にもノルム空間の構造が入り，定理 62 は積ノルム空間 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ から F への連続線型写像の場合に拡張される．これらを実行することは読者に任せよう．

ノルム空間の積からノルム空間への連続複線型写像

E，F，G を体 **K** 上の線型空間とする．積線型空間 E×F から G への線型写像についてはすでに学んだ．ここでは，まったく異なる概念，すなわち E×F から G への双線型写像を考える．

E×F から G への写像が**双線型写像**であるとは，一方の変数を任意に固定したとき，もう一方の変数に関して u が線型写像であることである．

$\vec{x} \in E$ を固定すると，偏写像 $u_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto u(\vec{x}, \vec{y})$ が F から G への写像として定まる：

(13.33) $$u_{\vec{x}}(\vec{y}) = u(\vec{x}, \vec{y}).$$

変数 $\vec{y}$ を除いた記号 $u(\vec{x},\ \ )$ もこの偏写像を表わすのに便利である**)．

---

*) u の線型性および $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2)$ による．

**) E と F とが異なるならば，記号 $u_{\vec{x}}$ の意味は疑問の余地がない．しかし，もし E＝F であると，u は E×E から G への写像で，$\vec{x} \in E$ に対する $u_{\vec{x}}$ と言っても意味不明である．すなわちそれが第一変数に関するものか第二変数に関するものか分らない．だから，$u(\vec{x},\ \ )$，$u(\ \ , \vec{x})$ と ↗

さて，u が双線型ならば，$u_{\vec{x}}$ は F から G への線型写像である．すなわち，

(13. 34)
$$\begin{cases} u(\vec{x},\ \vec{y}_1+\vec{y}_2)=u(\vec{x},\ \vec{y}_1)+u(\vec{x},\ \vec{y}_2) \\ u(\vec{x},\ \lambda\vec{y})=\lambda u(\vec{x},\ \vec{y}). \end{cases}$$

同様に，偏写像 $u_{\vec{y}}$ すなわち $u(\quad,\ \vec{y}):\vec{x}\mapsto u(\vec{x},\ \vec{y})$ は E から G への線型写像である．すなわち，

(13. 35)
$$\begin{cases} u(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{y})=u(\vec{x}_1,\ \vec{y})+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}) \\ u(\lambda\vec{x},\ \vec{y})=\lambda u(\vec{x},\ \vec{y}). \end{cases}$$

加法に関する条件の方は，u が加法に関して分配的である，とも言表わすことができる．上の二つの公式からつぎの公式が得られる：

(13. 36)
$$\begin{cases} u(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{y}_1+\vec{y}_2)=u(\vec{x}_1,\ \vec{y}_1)+u(\vec{x}_1,\ \vec{y}_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +u(\vec{x}_2,\ \vec{y}_1)+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}_2)^{*)} \\ u(\lambda\vec{x},\ \mu\vec{y})=\lambda\mu u(\vec{x},\ \vec{y}) \end{cases}$$

たとえば，空間のベクトルのスカラー積は $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}$ への双線型写像である．ベクトル積は $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への双線型写像である．双線型写像の原型は，実数や複素数の普通の乗法であって，これらはそれぞれ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への，また $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への双線型写像である．さらに，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への双線型写像は必ず $(x,\ y)\to cxy$（c は実定数）の形である．一方，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への線型写像は $(x,\ y)\mapsto ax+by$（$a,\ b$ は実定数）の形である．

定理 63.　E, F, G を K 上のノルム空間，u を E×F から G への双線型写像とする．もし u が原点で連続ならば，それはいたるところ連続である（一様連続にはならない）．u が連続であるためには，適当な定数 $k\geqslant 0$ を選んで，任意の $\vec{x}\in$ E および $\vec{y}\in$ F に対して

(13. 37)
$$\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant k\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|^{**)}$$

が成立つようにできることが必要十分である．

証明.　u が原点で連続とする．積位相の定義により，ある数 $\eta>0$ を取ると，$\|\vec{x}\|\leqslant\eta$, $\|\vec{y}\|\leqslant\eta$ なるかぎり $\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant 1$ となる．それぞれ λ 倍，μ 倍すると，公式 (13. 36) により，$\|\vec{x}\|\leqslant\lambda\eta$, $\|\vec{y}\|\leqslant\mu\eta$ ならば $\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant\lambda\mu$ となる．$\lambda=\dfrac{\|\vec{x}\|}{\eta}$, $\mu=\dfrac{\|\vec{y}\|}{\eta}$ とすると条件の不等式は成立つから，任意の $\vec{x}$, $\vec{y}$ に対して $\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant\dfrac{1}{\eta^2}\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ が成立つ．これは公式 (13. 37) で $k=\dfrac{1}{\eta^2}$ としたものである．

逆に (13. 37) を充たす k が存在するとして，u がいたるところ連続であることを示そう．

↘ 書かなければならない．

*) もし u が線型ならば，この左辺は $u(\vec{x}_1,\ \vec{y}_1)+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}_2)$ または $u(\vec{x}_1,\ \vec{y}_2)+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}_1)$ となるところである．

**) u が線型写像ならば，この左辺はたとえば $k(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)$ とならなければならない．

$(\vec{a},\ \vec{b}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$, $\varepsilon > 0$ が与えられたとする．公式

(13.38)　$$u(\vec{x},\ \vec{y}) - u(\vec{a},\ \vec{b}) = u(\vec{x} - \vec{a},\ \vec{y}) + u(\vec{a},\ \vec{y} - \vec{b})$$

からつぎの不等式が得られる：

(13.39)　$$\|u(\vec{x},\ \vec{y}) - u(\vec{a},\ \vec{b})\| \leqslant k\|\vec{x} - \vec{a}\|\ \|\vec{y}\| + k\|\vec{a}\|\ \|\vec{y} - \vec{b}\|.$$

$\eta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2k\|\vec{a}\|}$ と置くと，$\|\vec{y} - \vec{b}\| \leqslant \eta_2$ ならば $k\|\vec{a}\|\ \|\vec{y} - \vec{b}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる．つぎに $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2k(\|\vec{b}\| + \eta_2)}$ と置くと，$\|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \eta_1$ ならば $k\|\vec{x} - \vec{a}\|\ \|\vec{y}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる．したがって，$\|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \eta_1$, $\|\vec{y} - \vec{b}\| \leqslant \eta_2$ ならば $\|u(\vec{x},\ \vec{y}) - u(\vec{a},\ \vec{b})\| \leqslant \varepsilon$ となり，これは u が $(\vec{a},\ \vec{b})$ で連続であることを示す．　終．

注意．　双線型写像は，恒等的に零でないかぎり，決して一様連続にはならない．

証明．　$u(\vec{a},\ \vec{b}) \neq \vec{0}$ なる点 $(\vec{a},\ \vec{b})$ があったとする．$\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ 内の二つの点列 $\overline{\mathrm{X}}_n = (n\vec{a},\ n\vec{b})$ および $\overline{\mathrm{Y}}_n = \left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\vec{a},\ \left(n + \dfrac{1}{n}\right)\vec{b}\right)$ を考える．明らかに，$\|\overline{\mathrm{X}}_n - \overline{\mathrm{Y}}_n\| \leqslant \dfrac{1}{n}(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)$ が成立ち，n が $+\infty$ に近づくとき，$\overline{\mathrm{X}}_n$ と $\overline{\mathrm{Y}}_n$ との距離は 0 に近づく．ところが u による像の差は，

$$u(\overline{\mathrm{X}}_n) - u(\overline{\mathrm{Y}}_n) = \left(n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right) u(\vec{a},\ \vec{b}) = -\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)u(\vec{a},\ \vec{b})$$

であるから，n が $+\infty$ に近づくとき，そのノルムは $2\|u(\vec{a},\ \vec{b})\| \neq 0$ に近づくことになる．よって u は一様連続ではありえない[*]．　終．

定義．　不等式 (13.37) を充たす k の下限を双線型写像 u の**ノルム**と言い，$\|u\|$ と書く（もちろん u が連続の場合に限って定義される）：

(13.40)　$$\|u\| = \operatorname*{Sup}_{\vec{x} \neq 0,\, \vec{y} \neq 0} \frac{\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|}{\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|} = \operatorname*{Sup}_{\|\vec{x}\| \leqslant 1,\, \|\vec{y}\| \leqslant 1} \|u(\vec{x},\ \vec{y})\|.$$

当然つぎの不等式が成立つ：

(13.41)　$$\|u(\vec{x},\ \vec{y})\| \leqslant \|u\|\ \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|.$$

定理 64.　E, F, G をノルム空間とし，$\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ から G への連続双線型写像の全体を $\mathscr{L}_2(\mathrm{E},\ \mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ とする．公式 (13.40) によって定義されたノルムによって $\mathscr{L}_2(\mathrm{E},\ \mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ はまたノルム空間の構造を持つ．さらに，もし G がバナハ空間ならば $\mathscr{L}_2(\mathrm{E},\ \mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ もバナハ空間である．とくに $\mathrm{G} = \mathbf{K}$ の場合として，$\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ 上の連続双線型形式全体の線型空間はバナハ空間である．

証明は定理 59 および定理 61 の証明とまったく同じである．

---

[*] よく知られているように，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 $(x,\ y) \mapsto xy$ は一様連続でない．また，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像 $x \mapsto x^2$ も一様連続でない．

つぎに，$E\times F$ から G への連続双線型写像 u を考える．$\vec{x}\in E$ を固定すると，F から G への線型写像 $u_{\vec{x}}$ が定まる．これはもちろん連続であり，(13.41)により，そのノルムは $\|u\|\,\|\vec{x}\|$ で押えられる：$u_{\vec{x}}\in\mathscr{L}(F;G)$．こうして，$E$ の元 $\vec{x}$ に $\mathscr{L}(F;G)$ の元 $u_{\vec{x}}$ を対応させることができた．言換えれば，E から $\mathscr{L}(F;G)$ への写像 $U:\vec{x}\mapsto u_{\vec{x}}$ ができた．ところで，E も $\mathscr{L}(F;G)$ もともにノルム空間である．我々は U が E から $\mathscr{L}(F;G)$ への連続線型写像であり，しかもそのノルム $\|U\|$ がはじめの複線型写像のノルム $\|u\|$ と一致することを証明する．

まず U が線型であることを示そう（これには位相は介入しない）．そのためには，

(13.42)
$$u_{\vec{x}_1+\vec{x}_2}=u_{\vec{x}_1}+u_{\vec{x}_2},\quad u_{\lambda\vec{x}}=\lambda u_{\vec{x}}$$

が成立つことを示せばよい．この式に現われるものはすべて $\mathscr{L}(F;G)$ の元であり，その和やスカラー倍はそれぞれの値の和やスカラー倍によって定義されるのだから，(13.42) を言うためには，任意の $\vec{y}\in F$ に対して

(13.43)
$$u(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{y})=u(\vec{x}_1,\ \vec{y})+u(\vec{x}_2,\ \vec{y}),\ u(\lambda\vec{x},\ \vec{y})=\lambda u(\vec{x},\ \vec{y})$$

が成立つことを言えばよい．ところが，これは，$\vec{y}\in F$ を固定したときの偏写像 $u_{\vec{y}}:E\mapsto G$ が線型写像だという式にほかならない．

つぎに U が連続であることを示そう．F から G への連続線型写像 $U(\vec{x})=u_{\vec{x}}$ のノルムは $\|u\|\,\|\vec{x}\|$ で押えられる：$\|U(\vec{x})\|\leqslant\|u\|\,\|\vec{x}\|$．この式は E から $\mathscr{L}(F;G)$ への線型写像 U が連続であり，そのノルムが $\|u\|$ で押えられることを示している：$\|U\|\leqslant\|u\|$．一方，$\|U(\vec{x})\|\leqslant\|U\|\,\|\vec{x}\|$ だから，

$$\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|=\|U(\vec{x})\cdot\vec{y}\|\leqslant\|U(\vec{x})\|\,\|\vec{y}\|\leqslant\|U\|\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

となり，$\|u\|\leqslant\|U\|$ が成立つ．よって $\|u\|=\|U\|$．　終．

今度は逆に，E から $\mathscr{L}(F;G)$ への連続線型写像 U が与えられたとしよう．E の各元 $\vec{x}$ に対して $U(\vec{x})$ は $\mathscr{L}(F;G)$ の元，すなわち F から G への連続線型写像である．したがって，$\vec{y}\in F$ に対し，$U(\vec{x})\cdot\vec{y}$ は G の元である．そこで，$u(\vec{x},\ \vec{y})=U(\vec{x})\cdot\vec{y}$ と置くと，写像 $u:(\vec{x},\vec{y})\mapsto u(\vec{x},\vec{y})$ は $E\times F$ から G への写像である．簡単に言えるように，u は双線型写像であり，しかも連続である．なぜなら，$\|u(\vec{x},\ \vec{y})\|\leqslant\|U(\vec{x})\|\,\|\vec{y}\|\leqslant\|U\|\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ だから．しかも $\|u\|\leqslant\|U\|$ となることがこれから分る．

E の元 $\vec{x}$ を固定すると，いま作った u から定まる偏写像 $u_{\vec{x}}$ はもとの U の $\vec{x}$ での値 $U(\vec{x})$ にほかならない．したがって，u に伴なう（前段で構成した）E から $\mathscr{L}(F;G)$ への連続線型写像はもとの U 自身である．こうして，u と U とのあいだに一対一対応が確立され，$E\times F$ から G への連続双線型写像の全体 $\mathscr{L}_2(E,\ F;G)$ から，E から $\mathscr{L}(F;G)$ への連続線型写像の全体

$\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G}))$ への双射ができた．しかもこの双射は線型空間の構造およびノルムを不変に保つことが分った．もちろん，$\mathscr{L}_2(\mathrm{E},\ \mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ から $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G}))$ へも同様な双射が存在する．

定理 65. ノルム空間 E, F に対し，$\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\times\mathrm{E}$ から F への写像 $(u,\ \vec{x})\mapsto u\cdot\vec{x}$ は連続双線型写像であり，（E または F の一方が零のみでないかぎり）そのノルムは 1 である．

ノルム空間 E, F, G に対し，$\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\times\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ から $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ への写像 $(u,\ v)\mapsto v\circ u$ は連続双線型写像であり，（E, F, G の一つが零のみでないかぎり）そのノルムは 1 である．

証明. これらの写像が双線型写像であることはすぐ分る．それは線型写像の和およびスカラー倍の定義から出る*)．写像が連続でそのノルムが 1 以下であることはつぎの二つの不等式からすぐ分る：

$$\|u\cdot\vec{x}\|\leqslant\|u\|\,\|\vec{x}\|,\qquad \|v\circ u\|\leqslant\|v\|\,\|u\|\qquad(\text{公式 }(13.7),\ (13.8)).$$

つぎに任意の u と $\varepsilon>0$ とが与えられたとする．u のノルムの定義により，E の元 $\vec{x}\neq 0$ で，$\|u\cdot\vec{x}\|\geqslant(1-\varepsilon)\|u\|\,\|\vec{x}\|$ となるものが少なくとも一つ存在する．これは写像 $(u,\ \vec{x})\mapsto u\cdot\vec{x}$ のノルムが $1-\varepsilon$ より大きい（$\geqslant 1-\varepsilon$）ことを示す．ε は任意だから，結局ノルムは 1 以上，したがって 1 である．

第二の写像 $(u,\ v)\mapsto v\circ u$ のノルムがやはり 1 であることは，我々は証明なしに承認することにする．終．

連続複線型写像

$\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \cdots,\ \mathrm{E}_n$, F を体 $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする（$\mathbf{K}$ は実数体または複素数体）．$\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\cdots\times\mathrm{E}_n$ から F への写像 u が**複線型写像**（具体的には n **線型写像**）であるとは，$n-1$ 個の変数を勝手に固定したとき，残りの一変数について u が線型写像であることである．

たとえば，積 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mapsto x_1x_2\cdots x_n$ は $\mathbf{K}^n$ から $\mathbf{K}$ への n 線型写像である．また，三次元ベクトル三個の混合積は $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}$ への三線型写像である．

$\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\cdots\times\mathrm{E}_n$ から F への n 線型写像の全体にはノルム線型空間の構造が入る．これを $\mathscr{L}_n(\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \cdots,\ \mathrm{E}_n\,;\mathrm{F})$ と書く．もし F がバナハ空間ならば，これもバナハ空間である．

定理 65 の直前に述べた事柄はつぎのように一般化される．

---

*) $u\vec{x}$, vu, u^n 等の乗法的記号が許されるのは，これらの写像の双線型性によるのである（89 ページ参照）．

定理 66.　つぎに列挙する諸空間およびそれらの添数に置換を施したものの間には，ノルム線型空間の構造を保つ双射が存在する：$\mathscr{L}_n(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_n ; \mathrm{F})$, $\mathscr{L}_1(\mathrm{E}_1 ; \mathscr{L}_{n-1}(\mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_n ; \mathrm{F}))$, $\mathscr{L}_2(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 ; \mathscr{L}_{n-2}(\mathrm{E}_3, \cdots, \mathrm{E}_n ; \mathrm{F}))$, $\cdots$, $\mathscr{L}_{n-1}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_{n-1} ; \mathscr{L}_1(\mathrm{E}_n ; \mathrm{F}))$.

また，$u \in \mathscr{L}_n(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_n ; \mathrm{F})$ に対応する $\mathscr{L}_p(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_p ; \mathscr{L}_{n-p}(\mathrm{E}_{p+1}, \cdots, \mathrm{E}_n ; \mathrm{F}))$ の元 U はつぎの式で与えられる：

(13.44)
$$\mathrm{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_p)\cdot(\vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n) = u(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n).$$

線型環．ノルム環

体 **K** 上の線型空間 $\mathscr{A}$ に，さらに $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ から $\mathscr{A}$ への，乗法と呼ばれる双線型写像 $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x}\vec{y}$ が与えられていて，結合法則を充たし$(\vec{x}\vec{y})\vec{z} = \vec{x}(\vec{y}\vec{z})$，さらに単位元 $\mathrm{I} \neq 0$ （すべての $\vec{x}$ に対して $\vec{x}\mathrm{I} = \mathrm{I}\vec{x} = \vec{x}$） が存在するとき，$\mathscr{A}$ を **K** 上の**線型環**あるいは単に **K** 環と言う．体 **K** 自身も **K** 環である．**K** 上の線型環が同時にノルム線型空間でもあり，しかも

(13.45)
$$\|\mathrm{I}\| = 1, \qquad \|\vec{x}, \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

が成立つとき，それを**ノルム環**と言う．完備ノルム環を**バナハ環**と言う．ノルム線型空間 E に対し，$\mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{E})$ はノルム環である．ただし，乗法は写像の合成 $(u, v) \longmapsto u \circ v$ で定める．E がバナハ空間なら $\mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{E})$ はバナハ環である．

§ 14.　ノルム空間における級数

ノルム空間 E の点列 $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n, \cdots$ に対し，

(14.1)
$$\vec{\mathrm{S}}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} \vec{u}_m$$

と置く．$\vec{\mathrm{S}}_n$ を級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ の添数 n までの**部分和**と言う．これは E の元である．点列 $\vec{\mathrm{S}}_n$ が収束してその極限が $\vec{\mathrm{S}}$ のとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ は**収束**すると言い，$\vec{\mathrm{S}}$ をその**和**と言う[*]．すなわち，級数の概念は点列の概念に帰着する．逆に，ノルム空間の点列の概念は級数の概念に帰着する．すなわち，点列 $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ が収束してその極限が $\vec{a}$ であるのは，級数 $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \cdots + (\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}) + \cdots$ が収束してその和が $\vec{a}$ になる場合である．

---

[*] 級数の収束や発散は，ノルムを同値なノルムに変えても変わらない．なぜなら，収束性は位相的概念だから．

点列の場合と同様，E が有限次元のときには，基底を一つ選んでおくと，級数 $\sum_n \vec{u}_n$ が収束してその和が $\vec{\mathbf{S}}$ であるのは，その各成分から成る級数 $\sum_n (u_n)_i$ が収束してその和がそれぞれ $\vec{\mathbf{S}}_i$ になる場合である．ただし，$(u_n)_i$ は $\vec{u}_n$ の第 i 成分，$\mathbf{S}_i$ は $\vec{\mathbf{S}}$ の第 i 成分である．

バナハ空間の場合には，複素級数の場合と同様に，級数の和をあらかじめ知ることなくその収束性を判定することができる．

バナハ空間 E の級数 $\sum_n \vec{u}_n$ が収束するためには，それがコーシーの条件を充たすことが必要十分である．すなわち，m, n が $+\infty$ に近づくとき，$\|\vec{\mathbf{S}}_n - \vec{\mathbf{S}}_m\|$ が 0 に近づくことが必要十分である．記号的には，

(14.2)
$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists n \in \mathbf{N})\ (\forall m \geqslant n)\ (\forall k \in \mathbf{N}):$$
$$\|\vec{u}_m + \vec{u}_{m+1} + \cdots + \vec{u}_{m+k}\| \leqslant \varepsilon.$$

これからつぎの基本定理が得られる．これはベクトルの級数の収束性を判定するもっとも重要な方法である：

定理 67. E をバナハ空間，$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ を E の級数とする．ノルムの級数 $\sum \|\vec{u}_n\|$ が収束すればもとの級数も収束する．さらに，

(14.3)
$$\left\|\sum \vec{u}_n\right\| \leqslant \sum \|\vec{u}_n\|$$

が成立つ．

証明. コーシーの条件が成立つことを示そう．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある数 n を選ぶと，$m \geqslant n$ なる任意の m と任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して
$$\|\vec{u}_m\| + \|\vec{u}_{m+1}\| + \cdots + \|\vec{u}_{m+k}\| \leqslant \varepsilon$$
が成立つ．なぜならノルムの級数（正項）は収束するのだから，コーシーの条件が成立つはずである．これからただちに，$m \geqslant n$ に対し，
$$\|\vec{u}_m + \vec{u}_{m+1} + \cdots + \vec{u}_{m+k}\| \leqslant \varepsilon$$
が導かれる．すなわち問題の級数はコーシーの条件を充たし，E は完備と仮定してあるから，級数は収束する．さらに，有限項については $\|\vec{\mathbf{S}}_n\| \leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} \|\vec{u}_m\|$ が成立つのだから，n を $+\infty$ に近づけると，$\vec{\mathbf{S}}_n$ は $\vec{\mathbf{S}}$ に，したがって $\|\vec{\mathbf{S}}_n\|$ は $\|\vec{\mathbf{S}}\|$ に近づき（定理 9），不等式 (14.3) が得られる．　終．

この定理が成立つためには，E が完備であることが絶対に必要である．つぎの定理 68 によってそれが明らかになる．

定義. バナハ空間の級数に対し，その各項のノルムから成る正実数の級数が収束するとき，もとの級数は**ノルム収束**するまたは**絶対収束**すると

言う*). 級数自身は収束して，そのノルム級数が収束しないとき，もとの級数は**半収束**すると言う.

E が完備であることは絶対に欠かせない. つぎの逆定理が成立つ.

定理 68.　E をノルム空間とする. E の任意の級数 $\sum \vec{u}_n$ に対し，そのノルムから成る級数 $\sum \|\vec{u}_n\|$ が収束すれば必ずもとの級数が収束するという性質があれば，E は完備である.

証明.　E の任意のコーシー列が収束することを言えばよい.
$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \cdots$ をコーシー列とする. 任意の整数 $k \geqslant 0$ に対し，ある整数 p_k を選ぶと，$m \geqslant p_k$, $n \geqslant p_k$ に対して $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| \leqslant \frac{1}{2^k}$ が成立つ.
つぎつぎに p_k を選び，p_k の列が真増加であるように作る. そこで，級数

$$\vec{x}_{p_0} + (\vec{x}_{p_1} - \vec{x}_{p_0}) + (\vec{x}_{p_2} - \vec{x}_{p_1}) + \cdots$$

を考える. これのノルムから成る級数は，級数 $\|\vec{x}_{p_0}\| + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ によって押えられるから，正項級数に関する周知の性質によって収束する. E に関する仮定により，もとの級数も収束する. すなわち，はじめの数列 $\vec{x}_n$ の部分列 $\vec{x}_{p_n}$ は収束する. 定理 49 の系 2 によってコーシー数列 $\vec{x}_n$ 自身も収束する. したがって E は完備である.　終.

級数の項の順序変更

$\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n + \cdots$ を E のベクトルの級数とする. この級数の項の順序を変えることは，言換えれば，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への双射 $n \longmapsto p_n$ を考えて，新しい級数 $\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \cdots + \vec{u}_{p_n} + \cdots$ に置換えることを意味する.

定理 69.　ノルム線型空間 E の級数 $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n + \cdots$ が収束し，同時にノルム級数 $\|\vec{u}_0\| + \|\vec{u}_1\| + \cdots + \|\vec{u}_n\| + \cdots$ も収束するとする. このとき，項の順序を変えても，級数の収束性は保たれ，その和も変わらない.

証明.　与えられた級数の和を $\vec{S}$ とする. 与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，ある整数 m を取ると，$\sum_{n>m} \|\vec{u}_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ が成立つ. さらに，ある整数 m' を取ると，整数の集合 $\{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{m'}\}$ が集合 $\{0, 1, 2, \cdots, m\}$ を含むことになる. すると，$n' \geqslant m'$ なる n' に対しては，順序変更された級数の部分和 $\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \cdots + \vec{u}_{p_{n'}}$ は，もとの級数の部分和 $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m$ に，添数が $> m$ となる有限個の項の和を加えたものに等しい. さて，この残りの有限項の和のノルムは，$p_0, p_1, \cdots, p_{n'}$ の最大のものを p とすると，$\sum_{m<n\leqslant p} \|\vec{u}_n\|$ で押えられ，したがって $\sum_{n>m} \|\vec{u}_n\|$ で，したがって $\frac{\varepsilon}{2}$ で押えられる. し

---

*)　定理 12 により，ノルム収束の概念は，E のノルムを同値なノルムで置換えても変わらない.

たがって，$n' \geqslant m'$ に対して，

$$\|(\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \cdots + \vec{u}_{p_{n'}}) - (\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.4}$$

が成立つ．一方，

$$\|(\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m) - \vec{S}\| = \Big\|\sum_{n>m} \vec{u}_n\Big\| \leqslant \sum_{n>m} \|\vec{u}_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.5}$$

であるから，結局

$$\|(\vec{u}_{p_0} + \vec{u}_{p_1} + \cdots + \vec{u}_{p_{n'}}) - \vec{S}\| \leqslant \varepsilon \tag{14.6}$$

となり，新しい級数が収束し，しかも同じ和を持つことが分った．　終．

系.　正の実数を項とする級数が収束すれば，項の順序を変えた級数も収束し，同じ和を持つ．

定義.　I を添字の可算集合とし，$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ を，I を添字集合とする，ノルム空間 E のベクトルの族とする．**級数** $\sum_{i\in I} \vec{u}_i$ が**可換収束**してその**和**が $\vec{S}$ であるとは，**N** から I への任意の双射 $n \mapsto p_n$ に対して，普通の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_{p_n}$ が収束し，その和が，双射の選びかたに拘らず $\vec{S}$ であることである，と定義する．

u_i がすべて正（$\geqslant 0$）の実数であるとき，添字集合 I の有限部分集合 J に対応する和 $S_J = \sum_{i\in J} u_i$ 全部の $\overline{\mathbf{R}}$ における上限（有限または $+\infty$）を S とする．S が有限ならば級数は可換収束し，その和は S となる．なぜなら，**N** から I への双射 $n \mapsto p_n$ を取ろう．すると，$u_{p_0} + u_{p_1} + \cdots + u_{p_n} \leqslant S$ となる．一方，与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，I の有限部分集合 J で，$S_J \geqslant S - \varepsilon$ となるものが存在する．そこで，整数 m を，集合 $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ が集合 J を含むような最小のものとすると，$n \geqslant m$ に対して，$u_{p_0} + u_{p_1} + \cdots + u_{p_n} \geqslant S_J \geqslant S - \varepsilon$ となる．したがって，級数 $u_{p_0} + u_{p_1} + \cdots + u_{p_n} + \cdots$ は収束し，その和は S である．　証明終．

もし S が $+\infty$ ならば，**N** から I への任意の双射 $n \mapsto p_n$ に対して級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_{p_n}$ は発散する．なぜなら，もしある双射に対して級数が収束して和 σ を持つとすると，あらゆる J に対して $S_J \leqslant \sigma$ となり，したがって $S \leqslant \sigma$ となり，これは仮定に反する．　このとき，級数は**可換発散**すると言い，$\sum_{i\in I} \vec{u}_i = +\infty$ と書く．正項級数については，可換収束と言う必要はない．収束すれば自動的に可

換収束になるのだから，単に収束と言えばよい．

J が I の無限部分集合のとき，つねに，$\vec{S}_J = \sum_{i\in J} \vec{u}_i \leqslant \vec{S} = \sum_{i\in I} \vec{u}_i$ となる．

定理 69 により，バナハ空間 E のベクトルの級数 $\sum_{i\in I} \vec{u}_i$ があって，そのノルム級数 $\sum_{i\in I} \|\vec{u}_i\|$ が収束するならば，もとの級数自身は可換収束する．これに，さらにつぎの諸結果を付加えておこう．

1° 実数の級数に対しては，この性質の逆が成立つ．すなわち，
実数の級数は可換収束すれば絶対収束する，すなわち，級数 $\sum_{i\in I} |u_i|$ が収束する．

証明． 実数の級数を一つ取る．**N** から I への双射を一つ固定し，I = **N** と考える．つぎのような順序変更の手続きを考えよう．

まず正項ばかりを続けて取り，和が 1 を超えるまで取る．つぎに真負項を一つ取る．つぎに残りの正項からいくつか取って，そこまでの総和が 2 を超えるまで取る．つぎに第二の真負項を取る．また残りの正項から，和が 3 を超えるまで取る．つぎに第三の真負項を取る．この操作を続ける． さて，この手続きは，正項全部から成る部分級数が発散する場合にはつねに可能である． このとき，こうしてできた順序に関して，級数は発散する．なぜなら，任意の $n \geqslant 0$ に対し，n を超える部分和が存在するのだから．したがって，実数の級数は， その正項全部から成る部分級数が収束しないかぎり可換収束ではありえない．負項全部の部分級数についても同様である．すなわち，級数は絶対収束となる．　終．

2° E が有限次元ノルム空間の場合にも同じ逆定理が成立つ．

証明． **C** 上の n 次元空間は **R** 上の $2n$ 次元空間と見ることにし，**R** 上のノルム空間だけを考える．また，ノルムはどれもたがいに同値だから（定理 13），結果はノルムの選びかたとは無関係である． だから， 一つの基底を取って E を $\mathbf{R}^m$ と同一視し， ノルムは $\|(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\| = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$ としてよい．さて，級数が可換収束ならば，簡単に分るように，各成分から成る級数がどれも可換収束となる． 実数級数に関する上の結果によってそれらは絶対収束である． ノルムの選びかたから明らかなように，もとの級数も絶対収束である．

3° これに反し，無限次元のノルム空間に対しては，その級数で，可換収束ではあるが絶対収束ではないようなものを見出すことが，非常に微妙な推論によっ

てできることが分る*⁾.

級数が可換収束するときには，その収束性もその和も，項の順序とは無関係である．だから，正項級数のときと同様に，可換収束級数の収束性や和を，**N** から I への双射を選ぶことなく定義することができるのではないか，と考えるのは自然なことだろう．実際，つぎの定理が成立つ．

定理 70. 級数 $\sum_{i\in\mathrm{I}} \vec{u}_i$ が可換収束して，その和が $\vec{\mathrm{S}}$ となるのはつぎの場合である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，添字集合 I のある有限部分集合 J を選ぶと，J を含む I の任意の有限部分集合 K に対して不等式

$$\|\vec{\mathrm{S}}_{\mathrm{K}} - \vec{\mathrm{S}}\| = \Big\|\sum_{i\in\mathrm{K}} \vec{u}_i - \vec{\mathrm{S}}\Big\| \leqslant \varepsilon \tag{14.7}$$

が成立つ．

証明は読者に任せる．

可換収束級数の区分総和法

定理 71. 添字の可算集合 I が，たがいに共通元のない部分集合の族の合併としてつぎのように与えられているとする：

$$\mathrm{I}_\alpha,\ \alpha\in\mathrm{A} : \mathrm{I} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_\alpha,\ \ \mathrm{I}_\alpha\cap\mathrm{I}_\beta = \varnothing \qquad (\alpha \neq \beta \text{ に対して})^{**)}.$$

このとき，バナハ空間 E のベクトルの級数 $\sum_{i\in\mathrm{I}} \vec{u}_i$ が可換収束して和 $\vec{\mathrm{S}}$ を持つならば，各部分級数 $\sum_{i\in\mathrm{I}_\alpha} \vec{u}_i$ はどれも可換収束する．その和をそれぞれ $\vec{\mathrm{S}}_\alpha$ とすると，級数 $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \vec{\mathrm{S}}_\alpha$ は可換収束し，その和は $\vec{\mathrm{S}}$ となる．言換えれば，つぎの区分総和の公式が成立つ：

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \vec{u}_i = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\Big(\sum_{i\in\mathrm{I}_\alpha} \vec{u}_i\Big). \tag{14.8}$$

証明. もとの級数が絶対収束する場合だけ証明するに止める．$\mathrm{M} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|$ と置く．

---

*⁾ だから，たとえばバナハ空間 E のベクトルの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ に対しては，つぎのようないろいろの場合が考えられる：

a) 絶対収束，したがって可換収束．

b) 可換収束，しかし絶対収束でない（E が無限次元のときのみ）．

c) 収束，しかし可換収束でない．

d) 発散．

**⁾ A は有限または可算，各 I_α も有限または可算．

もちろん $\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha}\|\vec{u}_i\|\leqslant \mathrm{M}$ となるから，各級数 $\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha}\vec{u}_i$ は可換収束する（定理 67, 69）．また，$\|\vec{\mathrm{S}}_\alpha\|\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha}\|\vec{u}_i\|$ が成立つから， 添字集合 A の任意の 有限部分集合 B に対して不等式 $\sum_{\alpha\in \mathrm{B}}\|\vec{\mathrm{S}}_\alpha\|\leqslant\sum_{i\in\bigcup_{\alpha\in \mathrm{B}}\mathrm{I}_\alpha}\|\vec{u}_i\|\leqslant \mathrm{M}$ が成立つ．したがって級数 $\sum_{\alpha\in \mathrm{A}}\vec{\mathrm{S}}_\alpha$ は可換収束する．あとは，等式 $\sum_{\alpha\in \mathrm{A}}\vec{\mathrm{S}}_\alpha=\vec{\mathrm{S}}$ を示せばよい．

まず，与えられた $\varepsilon>0$ に対し，添字集合 I の有限部分集合 J で，優評価

$$\sum_{i\in \complement \mathrm{J}}\|\vec{u}_i\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad したがって\quad \|\vec{\mathrm{S}}-\vec{\mathrm{S}}_\mathrm{J}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{14.9}$$

が成立つものが存在する．

さて，A が可算のときには N から A への双射 $n\mapsto p_n$ を選び，A が有限のときには， N の部分集合 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ m\}$ から A への双射 $n\mapsto p_n$ を選ぶ．どちらの場合にも，適当な整数 m を取ると，I_{p_0}, I_{p_1}, $\cdots$, I_{p_m} の合併集合が J を含むことになる．すると，$n\geqslant m$ に対し，部分和 $\vec{\mathrm{S}}_{p_0}+\vec{\mathrm{S}}_{p_1}+\cdots+\vec{\mathrm{S}}_{p_n}$ は，$\vec{\mathrm{S}}_\mathrm{J}$ と，J に属さない i に対する項 $\vec{u}_i$ のみから成る一つの可換収束級数との和になる．よって，

$$\|(\vec{\mathrm{S}}_{p_0}+\vec{\mathrm{S}}_{p_1}+\cdots+\vec{\mathrm{S}}_{p_n})-\vec{\mathrm{S}}_\mathrm{J}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{14.10}$$

が成立ち，したがって不等式

$$\|(\vec{\mathrm{S}}_{p_0}+\vec{\mathrm{S}}_{p_1}+\cdots+\vec{\mathrm{S}}_{p_n})-\vec{\mathrm{S}}\|\leqslant\varepsilon \tag{14.11}$$

が成立つ．すなわち，$\sum_{\alpha\in \mathrm{A}}\vec{\mathrm{S}}_\alpha=\vec{\mathrm{S}}$ が証明された．　終．

注意．　1°　$\mathrm{I}=\mathbf{N}$ で，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ が収束はするが可換収束しないとき，上の主張はもちろん誤りである．たとえば u_n がすべて実数で，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が半収束のときには， その正項（$\geqslant 0$）全部から成る部分級数も，その真負項（<0）全部から成る部分級数も，ともに発散する．

2°　上の定理の逆を考えよう．添字集合 I の分割 $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ を考える．A の任意の元 α に対して， 級数 $\sum_{\alpha\in \mathrm{A}_\alpha}\vec{u}_i$ が可換収束してそれぞれ和 $\vec{\mathrm{S}}_\alpha$ を持つとする． さらに， 級数 $\sum_{\alpha\in \mathrm{A}}\vec{\mathrm{S}}_\alpha$ も可換収束すると仮定し，その和を $\vec{\mathrm{S}}$ とする．このとき，はじめの級数 $\sum_{i\in \mathrm{I}}\vec{u}_i$ が果して可換収束して和が $\vec{\mathrm{S}}$ になるだろうか．

もしそれが可換収束するならば，定理によってその和は $\vec{\mathrm{S}}$ である．しかし，この級数が可換収束することは全然保証されない．それにはつぎの例を考えてみればよい．I は整数の全体 $\mathbf{Z}$， A は正（$\geqslant 0$）整数の全体 $\mathbf{N}$ とし， 各 α すなわち各整数 $n\geqslant 0$ に対し，$\mathrm{I}_n=\{+n,\ -n\}$*) とする． さて， $u_i=i$ によって決まる級数を考える． $\sum_{\alpha\in \mathrm{A}}\left(\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha}u_i\right)=\sum_{n\in \mathbf{N}}(n-n)$ だから，それは可換収束で和は 0 である．一方明らかに級数 $\sum_{i\in \mathbf{Z}}i$ では可

---

*)　$\mathrm{I}_0=\{0\}$ である．

換収束ではない $\left(\sum_{i\in\mathbf{Z}}|i|=+\infty\right)$.

3° この場合とは違って，u_i がすべて正の実数のとき，$\sum_{\alpha\in\mathbf{A}}\left(\sum_{i\in\mathbf{I}_\alpha}u_i\right)$ のやりかたで和が S になれば，級数 $\sum_{i\in\mathbf{I}}u_i$ は収束し（なぜなら，任意の有限項の部分和が有界だから），したがって同じ和 S を持つ.

だから，正項級数が発散するときには和が $+\infty$ であると言うことにすると，全然仮定なしに等式 (14.8) が成立つ．すなわち，両辺とも有限または無限の正実数である.

4° E がバナハ空間のとき，級数 $\sum_{\alpha\in\mathbf{A}}\left(\sum_{i\in\mathbf{I}_\alpha}\|\vec{u}_i\|\right)$ が収束すれば級数 $\sum_{i\in\mathbf{I}}\|\vec{u}_i\|$ は確かに収束し，したがって級数 $\sum_{i\in\mathbf{I}}\vec{u}_i$ は可換収束する． したがって，定理 71 によって公式 (14.8) が成立つ.

連続線型写像の級数への影響

定理 72. E, F をノルム空間，L を E から F への連続線型写像とする．E の級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ が収束すれば，F の級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n$ も収束し，

(14.12)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n)=\mathbf{L}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n\right)$$

が成立つ.

E, F がともにバナハ空間の場合には，可換収束，絶対収束についても同じ主張が成立ち，さらに，不等式

(14.13)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n\|\leqslant\|\mathbf{L}\|\sum_{n=0}^{\infty}\|\vec{u}_n\|$$

が成立つ.

証明. L は線型写像だから，

(14.14)
$$\mathbf{L}\cdot\left(\sum_{n\leqslant m}\vec{u}_n\right)=\sum_{n\leqslant m}\left(\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n\right)$$

が成立つ．m が $+\infty$ に近づくと，$\sum_{n\leqslant m}\vec{u}_n$ は和 S に近づく．L の線型性により，左辺は $\mathbf{L}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ に，したがって右辺も $\mathbf{L}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ に近づく．すなわち，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n$ は収束して和 $\mathbf{L}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ を持ち，(14.12) が成立つ.

また，(13.6) から，不等式

(14.15)
$$\sum_{n\leqslant m}\|\mathbf{L}\cdot\vec{u}_n\|\leqslant\|\mathbf{L}\|\sum_{n\leqslant m}\|\vec{u}_n\|$$

が成立つ． m を $+\infty$ に近づけることによって (14.13) が成立つ（各辺は，有限または

$+\infty$). だから, $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ が絶対収束ならば $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}\cdot\vec{u}_n$ も絶対収束である. 　終.

二つの実数級数の積. 連続双線型写像の二つの級数への影響

連続双線型写像のもっとも簡単な例が $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への, 積を取るという写像であることを想起しよう.

二つの級数の積を項別に計算するためには, 絶対収束性の仮定がなければならないことを我々はすでに知っている. だから, ここでも単なる収束級数に関するこの種の定理はない.

定理 73. 　E, F, G をバナハ空間, B を $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ から G への連続双線型写像とする. E, F の級数 $\sum_{i\in\mathrm{I}}\vec{u}_i$, $\sum_{j\in\mathrm{J}}\vec{v}_j$ **がともに絶対収束ならば,** G の級数 $\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)$ も絶対収束し, 公式

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)=\mathrm{B}\Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\vec{u}_i,\ \sum_{j\in\mathrm{J}}\vec{v}_j\Big) \tag{14.16}$$

が成立つ.

証明. 　級数の和 $\sum_{i\in\mathrm{I}}\vec{u}_i$, $\sum_{j\in\mathrm{J}}\vec{v}_j$ をそれぞれ $\vec{\mathrm{U}}$, $\vec{\mathrm{V}}$ と書く. $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ の任意の有限部分集合 K に対し, I, J の有限部分集合 L, M で, $\mathrm{L}\times\mathrm{M}\supset\mathrm{K}$ となるものが存在する. このときつぎの不等式が成立つ:

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{K}}\|\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)\|\leqslant\sum_{(i,j)\in\mathrm{L}\times\mathrm{M}}\|\mathrm{B}\|\,\|\vec{u}_i\|\,\|\vec{v}_j\| \tag{14.17}$$
$$=\|\mathrm{B}\|\Big(\sum_{i\in\mathrm{L}}\|\vec{u}_i\|\Big)\Big(\sum_{j\in\mathrm{M}}\|\vec{v}_j\|\Big)\leqslant\|\mathrm{B}\|\Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\|\vec{u}_i\|\Big)\Big(\sum_{j\in\mathrm{J}}\|\vec{v}_j\|\Big).$$

すなわち, 級数 $\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}\|\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)\|$ の任意の有限部分和は有界で, したがって級数 $\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)$ は絶対収束する. だから, それに区分総和の定理 (定理 71) を適用することができる. ところで, 積集合 $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ には注目すべき区分けがある. $\mathrm{I}\times\mathrm{J}=\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\{i\}\times\mathrm{J}$ がそれである. よって, $\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)=\sum_{i\in\mathrm{I}}\Big(\sum_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)\Big)$.

そこで, まず i を固定して和 $\sum_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)$ を考えよう. $\vec{u}_i$ を固定すると, 写像 $\vec{v}\mapsto\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v})$ は F から G への連続線型写像である. だから, 定理 72 を, F の絶対収束級数 $\sum_{j\in\mathrm{J}}\vec{v}_j$ およびこの連続線型写像に適用することができ, 公式

$$\sum_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{v}_j)=\mathrm{B}\Big(\vec{u}_i,\ \sum_{j\in\mathrm{J}}\vec{v}_j\Big)=\mathrm{B}(\vec{u}_i,\ \vec{\mathrm{V}}) \tag{14.18}$$

が得られる.

つぎに，いまと同様に，E から G への連続線型写像 $\vec{u} \mapsto \mathrm{B}(\vec{u}, \vec{\mathrm{V}})$ と E の級数 $\sum_{i \in \mathrm{I}} \vec{u}_i$ とに定理 72 を適用して，

(14. 19)
$$\sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{B}(\vec{u}_i, \vec{\mathrm{V}}) = \mathrm{B}\Big(\sum_{i \in \mathrm{I}} \vec{u}_i, \vec{\mathrm{V}}\Big) = \mathrm{B}(\vec{\mathrm{U}}, \vec{\mathrm{V}})$$

が得られ，したがって

$$\sum_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} \mathrm{B}(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \mathrm{B}(\vec{\mathrm{U}}, \vec{\mathrm{V}})$$

が得られる．これが目標の (14. 16) にほかならない．　終．

とくに I, J がともに自然数 ($\geqslant 0$) の全体 $\mathbf{N}$ のときは，テイラー級数の理論でよくやるように，

(14. 20)
$$\vec{w}_n = \mathrm{B}(\vec{u}_n, \vec{v}_0) + \mathrm{B}(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_1) + \cdots + \mathrm{B}(\vec{u}_0, \vec{v}_n)$$

と置いて級数 $\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} \mathrm{B}(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ を一列に並べなおし，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{w}_n$ をもって二つの級数の積とみなすことがある．

注意．　もし，級数 $\sum_{i,j} \mathrm{B}(\vec{u}_i, \vec{v}_j)$ の可換収束性があらかじめ分っていれば，上の証明から分るように，はじめの二つの級数が絶対収束であることを仮定する必要はない．

応用．　バナハ空間の可逆写像

定義．　E, F をノルム空間，u を E から F への連続線型写像とする．u が双射であり，しかもその逆写像 u^{-1} (これは明らかに線型) が連続であるとき，u を**可逆写像**と言う．E = F のときには，このことは，線型環 $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{E})$ 内に u が逆元を持つことを意味する．

さらに，$u \circ u^{-1}$ が恒等写像であることと公式 (13. 7) とから，u, u^{-1} のノルムの間につぎの関係があることが分る：

(14. 21)
$$1 = \|\text{恒等写像}\| \leqslant \|u\|\ \|u^{-1}\| \quad \text{または} \quad \|u^{-1}\|^{-1} \leqslant \|u\|.$$

バナハ空間の級数の性質を使って，可逆写像に十分近い写像はみな可逆であることを証明することができる．詳しくは，

定理 74.　E, F をバナハ空間，u を E から F への可逆な連続線型写像とする．v が E から F への連続線型写像で，不等式

(14. 22)
$$\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1}$$

を充たすならば，連続線型写像 $u + v$ は可逆である．さらに，

$$\|(u+v)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|u^{-1}\|^{-1} - \|v\|}$$

が成立つ.

証明.　まず $\mathrm{E}=\mathrm{F}$, $u=\mathrm{I}$（恒等写像）の場合を考える. v は E から E への連続線型写像で, $\|v\|<1$ を充たす. 記号 $<$ を記号 $\leqslant$ で置換えることはもちろんできない. $v=-\mathrm{I}$ とすれば $\mathrm{I}-\mathrm{I}=0$ になってしまう.

まず形式的な計算から始める. $(1+z)^{-1}=\dfrac{1}{1+z}$ を等比級数 $1-z+z^2-\cdots$ に展開するように,

(14.23)　$$(\mathrm{I}+v)^{-1}=\mathrm{I}-v+v^2-v^3+\cdots+(-1)^n v^n+\cdots$$

と書いてみる. v^n は写像 v の n 個の合成 $v\circ v\circ\cdots\circ v$ のことである. この形式的な計算を合理化しよう.

右辺の級数はバナハ空間 $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$（定理 61）のノルム収束級数である. 実際, $\|v^2\|=\|v\circ v\|\leqslant\|v\|\,\|v\|=\|v\|^2$ から $\|v^n\|\leqslant\|v\|^n$ が得られ, $\|v\|<1$ だから. よって, 定理 67 によって級数は収束し, $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ のある元 w を表わす.

定理 65 により, $u\mapsto uv$ は $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ から $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ への連続線型写像であるから, この写像と (14.23) の右辺の級数とに定理 72 を適用することができ, 項別の計算によって,

(14.24)　$$w(\mathrm{I}+v)=w+wv=(\mathrm{I}-v+v^2-v^3+\cdots)+(v-v^2+v^3-\cdots)=\mathrm{I}$$

が得られる. 同様に, $(\mathrm{I}+v)w=\mathrm{I}$ となる. 第1章の 7 ページで見たことにより, $\mathrm{I}+v$ は双射であり, w はその逆双射である. $w\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ だから $\mathrm{I}+v$ は可逆である. この場合には定理は証明された. さらに, 不等式

(14.25)　$$\|w\|=\|(\mathrm{I}+v)^{-1}\|\leqslant 1+\|v\|+\cdots+\|v\|^n+\cdots=\frac{1}{1-\|v\|}$$

も得られた.

$\mathrm{I}+v$ の可逆性が不動点定理からも得られることを注意しておこう. 実際, E の元 $\vec{y}$ を取る. これに対して, $(\mathrm{I}+v)\vec{x}=\vec{y}$ となる E の元 $\vec{x}$ が存在するかどうかが問題である. 言換えれば, $\vec{x}+v\cdot\vec{x}=\vec{y}$ または $\vec{x}=-v\vec{x}+\vec{y}$ となる $\vec{x}$ が存在するか. E から E への写像 $f:\vec{x}\mapsto -v\vec{x}+\vec{y}$ を考えよう. $\|v\|<1$ だから, $\|-v(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\|\leqslant\|v\|\,\|\vec{x}_1,-\vec{x}_2\|$ により, 写像 f は縮小写像である. E が完備だから, 定理 56 により, $\vec{x}=f(\vec{x})$, すなわち $(\mathrm{I}+v)\vec{x}=\vec{y}$ となる $\vec{x}$ がただ一つ存在する. したがって $\mathrm{I}+v$ は双射である. これは線型だから, その逆写像も線型である. さらに, 定理 57 によって $\vec{x}$ は $\vec{y}$ に連続的に依存するから, $(\mathrm{I}+v)^{-1}$ は連続である. だから $\mathrm{I}+v$ は可逆である.　終.

ここで, $\vec{y}$ から $\vec{x}$ を得るのに, $\vec{x}_0=\vec{0}$ から出発する逐次近似法によることにすると, $\vec{x}_1=\vec{y}$, $\vec{x}_2=-v\vec{x}_1+\vec{y}=-v\cdot\vec{y}+\vec{y}$, $\vec{x}_3=-v\vec{x}_2+\vec{y}=\vec{y}-v\cdot\vec{y}+v^2\vec{y}$, $\cdots$ となり, 極限において, $\vec{x}=\vec{y}-v\vec{y}+v^2\vec{y}-v^3\vec{y}+\cdots$ となる. これは, $(\mathrm{I}+v)^{-1}=\mathrm{I}-v+v^2-v^3+\cdots$ を書き直したものである.

さて，定理の一般の場合の証明に進もう．E，F は任意のバナハ空間，u は可逆，$\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1}$ とする．u が可逆だから，

(14.26) $$u + v = u(\mathrm{I} + u^{-1}v)$$

と書ける．$u^{-1}v$，$\mathrm{I} + u^{-1}v$ はともに E から E への連続線型写像であり，v に関する仮定により，$\|u^{-1}v\| \leqslant \|u^{-1}\|\ \|v\| < 1$ が成立つ．いま証明した特別な場合の定理により，$\mathrm{I} + u^{-1}v$ は可逆であり，その逆写像は

(14.27) $$(\mathrm{I} + u^{-1}v)^{-1} = \mathrm{I} - u^{-1}v + u^{-1}vu^{-1}v - u^{-1}vu^{-1}vu^{-1}v + \cdots$$

で与えられる．$u + v$ は (14.26) によって二つの可逆写像の合成だからそれ自身可逆であり，その逆写像は，それぞれの逆写像を反対の順序に合成したもの，すなわちつぎの級数で与えられる：

(14.28) $$\begin{aligned}(u + v)^{-1} &= (\mathrm{I} + u^{-1}v)^{-1}u^{-1}\\ &= u^{-1} - u^{-1}vu^{-1} + u^{-1}vu^{-1}vu^{-1} - u^{-1}vu^{-1}vu^{-1}vu^{-1} + \cdots.\end{aligned}$$

さらに，不等式

(14.29) $$\begin{aligned}\|(u + v)^{-1}\| &\leqslant \|(\mathrm{I} + u^{-1}v)^{-1}\|\ \|u^{-1}\| \leqslant \frac{\|u^{-1}\|}{1 - \|u^{-1}v\|} \leqslant \frac{\|u^{-1}\|}{1 - \|u^{-1}\|\ \|v\|}\\ &= \frac{1}{\|u^{-1}\|^{-1} - \|v\|}\end{aligned}$$

が成立つ．　終．

注意 1.　$\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ の可逆元の全体を $\mathscr{U}$ とし，$\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$ の可逆元の全体を $\mathscr{U}^{-1}$ と書く．$u_0 \in \mathscr{U}$ ならば，u_0 を中心とする半径 $\|u_0^{-1}\|^{-1}$ の開球（$\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ の）は $\mathscr{U}$ に含まれる．したがって $\mathscr{U}$ は $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ の開集合である．同様に，$\mathscr{U}^{-1}$ は $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$ の開集合である．いま出てきたいくつかの不等式により，$u \mapsto u^{-1}$ が $\mathscr{U}$ から $\mathscr{U}^{-1}$ への同相写像であることが分る．この証明は読者に任せよう．第 3 章の定理 46 で再会することになる．

注意 2.　$\mathscr{A}$ がバナハ環のときにも，同じ証明法により，$\vec{x} \in \mathscr{A}$ が可逆元，$\vec{y}$ が $\mathscr{A}$ の元で $\|\vec{y}\| < \|\vec{x}^{-1}\|^{-1}$ を充たすものであるとき，$\vec{x} + \vec{y}$ は可逆であることが証明され，その逆元が

(14.30) $$(\vec{x} + \vec{y})^{-1} = \vec{x}^{-1} - \vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1} + \vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1}\vec{y}\vec{x}^{-1} - \cdots$$

で与えられることが分る．$\mathscr{A}$ の可逆元の全体を $\mathscr{U}$ とすると $\mathscr{U}$ は $\mathscr{A}$ の開集合であり，$\vec{x} \mapsto \vec{x}^{-1}$ は $\mathscr{U}$ から $\mathscr{U}$ への同相写像である．

半収束の判定基準

$\vec{u}_0$，$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$，…，$\vec{u}_n$，… をバナハ空間 E の元の列とする．級数

(14.31) $$\|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\| + \|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\| + \cdots + \|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\| + \cdots$$

が収束するとき，はじめの点列は**有界変分**であると言い，級数 (14.31) の和を

点列の**全変分**と言う．このとき，もとの数列は当然収束する．なぜなら，それは級数 $\vec{u}_0+(\vec{u}_1-\vec{u}_0)+(\vec{u}_2-\vec{u}_1)+\cdots$ の収束と同値であり，我々の仮定はこの級数が絶対収束するということであるから．そして，実は，有界変分数列が収束するということと，絶対収束級数が収束するということとは同じことであることが分る．

u_n が実数列で単調かつ有界ならば有界変分である．実際，それが増大有界数列ならば，

$$(14.32)\qquad |u_1-u_0|+|u_2-u_1|+\cdots=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots \\ =-u_0+\lim_{n\to\infty}u_n<+\infty$$

となる．ジョルダンはこの逆も証明した．すなわち，実数列 u_n が有界変分ならば，二つの増大有界数列 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ および $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$ を適当に取って，$u_n=a_n-b_n$ と書くことができる*)．

さて，級数の半収束を判定するもっとも重要な基準を与える．普通使うあらゆる基準（とくに交項級数の収束基準）はこの基準に帰着できる．

定理 75（アーベルの定理）．　E, F, G をバナハ空間とする．$\vec{u}_n$ を E のベクトルの有界変分列で，$n\to\infty$ のとき $\vec{0}$ に収束するものとし，u_m を F のベクトルの列で部分和が有界なものとする．すなわち，あらゆる $n\geqslant m$ に対する

$$(14.33)\qquad \vec{\sigma}_{m,n}=\vec{v}_m+\vec{v}_{m+1}+\cdots+\vec{v}_n$$

のノルムが有界であるとする．このとき，E×F から G への任意の連続双線型写像 B に対し，$\vec{w}_n=\mathrm{B}(\vec{u}_n,\ \vec{v}_n)$ を一般項とする G の級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{w}_n$ は収束する．

さらに，$\mathrm{U}_m=\|\vec{u}_{m+1}-\vec{u}_m\|+\|\vec{u}_{m+2}-\vec{u}_{m+1}\|+\cdots$，$\mathrm{V}_m=\operatorname{Sup}_{n\geqslant m}\|\vec{\sigma}_{m,n}\|$ と置くと，和 $\vec{\mathrm{S}}=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{w}_n$ および残項 $\vec{\mathrm{R}}_m=\vec{w}_{m+1}+\vec{w}_{m+2}+\cdots$ に対してつぎの不等式が成立つ：

$$(14.34)\qquad \|\vec{\mathrm{S}}\|\leqslant\|\mathrm{B}\|\mathrm{U}_0\mathrm{V}_0,\qquad \|\vec{\mathrm{R}}_m\|\leqslant\|\mathrm{B}\|\mathrm{U}_{m+1}\mathrm{V}_{m+1}{}^{**)}.$$

---

*) これはほとんど明らかである．つぎのように置けばよい．すなわち，$a_0=(u_0)^+$，$a_1=(u_0)^++(u_1-u_0)^+$，$a_2=(u_0)^++(u_1-u_0)^++(u_2-u_1)^++\cdots$ と置き，$b_0=(u_0)^-$，$b_1=(u_0)^-+(u_1-u_0)^-$，$b_2=(u_0)^-+(u_1-u_0)^-+(u_2-u_1)^-+\cdots$ と置く．ただし，x^+ は $x\geqslant 0$ ならば x を，$x<0$ ならば 0 を表わし，x^- は $x>0$ ならば 0 を，$x\leqslant 0$ ならば $|x|$ を表わす．もちろん，$x=x^+-x^-$，$|x|=x^++x^-$．

**) この右辺は $m\to+\infty$ のとき 0 に収束する．なぜなら V_{m+1} は有界であり，一方，U_{m+1} は収束正項級数の残項だから 0 に収束する．

この基準を実際に使うのは，ほとんど E, F, G がどれも複素数体 **C** であり，B が積写像 $(u,\ v)\longmapsto uv$ の場合である．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{v}_n$ が収束すれば，$\vec{\sigma}_{m,n}$ はたしかに有界である．

証明． まずつぎの変形を行なう．

(14.35)
$$\begin{aligned}\vec{S}_n &= B(\vec{u}_0,\ \vec{v}_0)+B(\vec{u}_1,\ \vec{v}_1)+\cdots+B(\vec{u}_n,\ \vec{v}_n)\\ &= B(\vec{u}_0,\ \vec{\sigma}_{0,0})+B(\vec{u}_1,\ \vec{\sigma}_{0,1}-\vec{\sigma}_{0,0})+\cdots+B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n}-\vec{\sigma}_{0,n-1})\\ &= B(\vec{u}_0,\ \vec{\sigma}_{0,0})+[B(\vec{u}_1,\ \vec{\sigma}_{0,1})-B(\vec{u}_1,\ \vec{\sigma}_{0,0})]+\cdots\\ &\qquad +[B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n})-B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n-1})]\\ &= B(\vec{u}_0-\vec{u}_1,\ \vec{\sigma}_{0,0})+B(\vec{u}_1-\vec{u}_2,\ \vec{\sigma}_{0,1})+\cdots\\ &\qquad +B(\vec{u}_{n-1}-\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n-1})+B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n}).\end{aligned}$$

最後の項 $B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n})$ のノルムは $\|B\|\ \|u_n\|V_0$ で押えられる．$n\longrightarrow+\infty$ のとき，$\vec{u}_n\longrightarrow\vec{0}$ だから $B(\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n})\longrightarrow 0$ となる．

だから，あとは

(14.36)
$$B(\vec{u}_0-\vec{u}_1,\ \vec{\sigma}_{0,0})+B(\vec{u}_1-\vec{u}_2,\ \vec{\sigma}_{0,1})+\cdots+B(\vec{u}_{n-1}-\vec{u}_n,\ \vec{\sigma}_{0,n-1})$$

が，$n\longrightarrow+\infty$ のとき極限を持つことを言えばよい．それには，

(14.37)
$$\overrightarrow{W}_n=B(\vec{u}_n-\vec{u}_{n+1},\ \vec{\sigma}_{0,n})$$

を一般項とする級数が収束することを言えばよい．これのノルム級数は，不等式

(14.38)
$$\|\overrightarrow{W}_n\|\leqslant\|B\|\ \|\vec{u}_n-\vec{u}_{n+1}\|V_0$$

と，列 $\vec{u}_n$ が有界変分であるという仮定によって収束する．**G** は完備だから，定理 67 により，級数 $\sum\overrightarrow{W}_n$ は収束する．

収束性が一旦証明されると，つぎの優評価

(14.39)
$$\|\vec{S}_n\|\leqslant\|B\|\ \|\vec{u}_n\|V_0+\|B\|U_0V_0$$

が得られ，$n\longrightarrow+\infty$ として，優評価

(14.40)
$$\|\vec{S}\|\leqslant\|B\|U_0V_0$$

が得られる．同じ計算を，$\vec{w}_{m+1}$ から開始すれば (14.34) が得られる． 終．

例． 1° 交項級数の収束基準．

実級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ と考える．ただし，数列 $u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$ は正項減小数列で，$n\longrightarrow+\infty$ のとき 0 に収束するとする．このとき，$v_n=(-1)^n$，$U_m=u_m$，$V_m=1$ として定理が適用され，不等式

(14.41)
$$|R_m|\leqslant u_{m+1}$$

が得られる．さらにこの場合には，残項の符号が，無視した最初の項の符号に一致することも分る．

2° 三角級数の場合．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{ni\theta}$ を考える．ただし，列 u_0, u_1, …, u_n, … は有界変分の複素数列で 0 に収束するものとし，θ は実数とする*)．

$v_n = e^{ni\theta}$ と置く．$\theta \neq 2k\pi$ ならば，等比級数の総和公式により，

(14.42)
$$e^{mi\theta} + e^{(m+1)i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{mi\theta}}{e^{i\theta} - 1}$$

が成立ち，したがって優評価

(14.43)
$$|\sigma_{m,n}| \leqslant \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$$

が得られる．$\theta = 2k\pi$ のときには $e^{mi\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = n - m + 1$ だから有界でない．結論として，$\theta \neq 2k\pi$ ならば級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{ni\theta}$ は収束し，優評価

(14.44)
$$|\mathrm{S}| \leqslant \mathrm{U}_0 \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}, \qquad |\mathrm{R}_m| \leqslant \mathrm{U}_{m+1} \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$$

が成立つ．

もちろん，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos n\theta$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin n\theta$ に対しても同様の結果が成立つ．とくに最後の正弦級数は，$\theta = 2k\pi$ のときにも収束する（項が全部 0 になる）．

§ 15.　関数空間の実例．単純収束と一様収束

関 数 空 間

関数空間とは，その元がすべて関数，すなわちある集合からある集合への写像であるような空間のことである．

集合 E, F に対し，第1章6ページで定義したように，E から F への写像の全体を F^{E} と書く．F が何らかの構造（線型空間，距離空間等）を持っていると，一般に F^{E} にも類似の構造を導入することが可能である．

1° F が体 K 上の線型空間ならば，F^{E} も K 上の線型空間の構造を持つ．実際，E から F への写像 $\vec{f}$, $\vec{g}$ およびスカラー λ に対し，和 $\vec{f} + \vec{g}$ および積 $\lambda\vec{f}$ を，E から F への写像としてつぎのように定めることができる：

(15.1)
$$(\vec{f} + \vec{g})(x) = \vec{f}(x) + \vec{g}(x) \qquad (x \in \mathrm{E})$$

(15.2)
$$(\lambda\vec{f})(x) = \lambda\vec{f}(x) \qquad (x \in \mathrm{E}).$$

こうして F^{E} に加法とスカラー乗法とが定義された．これによって F^{E} が K

---

*) u_n が減小実数列で 0 に収束する場合，$\theta = \pi$ と置けば，交項級数の収束基準が得られる．

上の線型空間の公理をすべて充たすことはすぐに分る*).
たとえば F が体 **K** 自身で, **K** が実数体または複素数体の場合, E 上の実数値または複素数値関数の全体 $\mathbf{K}^{\mathrm{E}}$ は, 実数体または複素数体上の線型空間である.

2° F が距離空間の場合, E から F への二つの写像 f, g の距離 $d(f, g)$ を,

$$d(f, g) = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E}} d(f(x), g(x)) \tag{15.3}$$

によって定める. しかし, この距離は必ずしも有限ではない. 上限は補完実数直線 $\overline{\mathbf{R}}$ の中で考えなければならない. だから, F^{E} に普通の距離空間の構造を入れることは必ずしも可能でない. このゆえに, 我々は, E から F への有界写像の全部の作る部分空間 $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ を考えるのである. E から F への写像 f が**有界写像**であるとは, E の像 $f(\mathrm{E})$ が F の有界部分集合であることを意味する. f, g がともに E から F への有界写像ならば, その距離は有限である. なぜなら, たとえば, $f(\mathrm{E})$ は中心 a, 半径 α の F の球に含まれ, $g(\mathrm{E})$ は中心 b, 半径 β の F の球に含まれるとしよう. すると, $g(\mathrm{E})$ は a を中心とする半径 $\beta + d(a, b)$ の球に含まれる. E の任意の元 x に対し, $d(f(x), g(x)) \leqslant \alpha + \beta + d(a, b)$ が成立つから, $d(f, g)$ はたしかに有限である.

写像 $d : (f, g) \mapsto d(f, g)$ が $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ の距離関数であることを示そう**).
(1.1) の三つの性質を調べる. 対称性は明らかである. 正値性も明らかだろう. なぜなら, まずつねに $d(f, g) \geqslant 0$ であるし, もし f と g とが異なるならば, 少なくとも一つの $x \in \mathrm{E}$ に対して $d(f(x), g(x)) > 0$ となるからである.

あとは三角不等式である. E から F への有界写像 f, g, h および E の元 x に対し,

$$\begin{aligned} d(f(x), h(x)) &\leqslant d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \\ &\leqslant d(f, g) + d(g, h) \end{aligned} \tag{15.4}$$

が成立つから, 結局

$$d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h) \tag{15.5}$$

となって三角不等式が成立つ.

注意. いま導入した概念は距離的概念であって位相的概念ではない. F の距離を同値な

*) とくに E が二個の元から成るとき, F^{E} は $\mathrm{F}^2 = \mathrm{F} \times \mathrm{F}$ と同一視され, いま導入した F × F 上の線型空間構造は, 92 ページの公式 (13.23), (13.24) で定めた積線型空間の構造となる.

**) E が二つの元から成るとき, F^{E} は $\mathrm{F}^2 = \mathrm{F} \times \mathrm{F}$ と同一視され, いま我々が定義した $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ (このときは F^{E} 全体) 上の距離は, 49 ページで我々が積空間の距離として選んだものの一つとなる. すなわち,

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \operatorname{Sup}(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)).$$

距離に置換えると，まず空間 $(\mathrm{F^E})_b$ 自身がまったく変わってしまう．なぜなら，関数が有界だという性質は距離自身に依存し，位相的概念ではないからである． また，かりに空間 $(\mathrm{F^E})_b$ は変わらなかったとしても，その上の新しい距離は，はじめの距離と同値になるとは限らない．

3° つぎに F がノルム線型空間の構造を持つとする． 空間 $(\mathrm{F^E})_b$ 上に，ノルム線型空間の構造が，

$$|||f||| = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E}} \|\overrightarrow{f(x)}\|^{*)} \tag{15.6}$$

と置くことによって定まる．

前と同じ方法で，これが実際にノルムであることが分る．そして，このノルムの定める距離 $d(f, g) = |||f-g|||$ が，2° で定義した距離と一致することが分る．

たとえば，F が実数体または複素数体自身であるとき，集合 E 上の実数値または複素数値関数の全体はノルム空間である**)．

1° と 3° とで得られる線型空間は普通無限次元である． 実際， E が n 個の元から成る集合であるとし，簡単のため，その元を 1, 2, …, n と書く．$\mathrm{F} = \mathbf{R}$ のとき，集合 $\mathrm{F^E}$ は積空間 $\mathbf{R}^n$ であり，3° で導入したノルムは，

$$\|(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\| = \mathrm{Sup}\,(|x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_n|) \tag{15.7}$$

にほかならない． E が無限個の元を含めば（もっとも重要な場合は E が実数直線またはその区間である場合），空間 $\mathrm{F^E}$ は無限次元である．

定理 76.　F が完備な距離空間ならば，E から F への有界写像全体のつくる距離空間 $(\mathrm{F^E})_b$ も完備である***)．

証明．　$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n,\ \cdots$ を $(\mathrm{F^E})_b$ のコーシー列とする． 距離の定義によって $d(f_m(x),\ f_n(x)) \leqslant d(f_m,\ f_n)$ だから，E の任意の元 x に対して， 点列 $f_n(x)$ は F のコーシー列である． 仮定により，この列は F のある点に収束する． その点を $f(x)$ と書くことにより，E から F への写像 f が定まる．

まず f が有界写像であることを示す． $\varepsilon > 0$ に対してある整数 p を取ると， $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ ならば $d(f_m,\ f_n) \leqslant \varepsilon$ だから， $d(f_m(x),\ f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ （x は E の任意の点） と

---

*) F の元のノルムを ‖ ‖ で，E から F への有界写像のノルムを ||| ||| で表わす． これは，二つのノルム空間 F, $(\mathrm{F^E})_b$ の混同を避けるためである． $(\mathrm{F^E})_b$ の元 $\vec{f}$ に対し， $\|\vec{f}\|$ は正値関数 $x \mapsto \|\overrightarrow{f(x)}\|$ を表わし，$|||\vec{f}|||$ はこの関数の上限（正実数）を表わす．

**) 係数体 $\mathbf{K}$ 上ではノルムは絶対値 | | である． $(\mathbf{K}^\mathrm{E})_b$ の元 f に対し，$|f|$ は正値関数 $x \mapsto |f(x)|$ を表わす． この場合には，この関数 f の上限，すなわち f の $(\mathbf{K}^\mathrm{E})_b$ でのノルムを $\|f\|$ で表わしても混乱は生じない．

***) 前ページの脚注 **) により，この定理は特別な場合として定理 53 を含む．

なる. x を固定して $m \longrightarrow +\infty$ とすると, F の距離関数の連続性により, $d(f(x),\ f_n(x))$ $\leqslant \varepsilon$ となる. f_p は有界だから, 集合 $f_p(\mathrm{E})$ は中心 a_p, 半径 R_p の球に含まれる. 不等式 $d(a_p,\ f(x)) \leqslant d(a_p,\ f_p(x)) + d(f_p(x),\ f(x))$ により, 集合 $f(\mathrm{E})$ は中心 a_p, 半径 $\mathrm{R}_p + \varepsilon$ の球に含まれ, f は有界写像である.

つぎに, $n \longrightarrow +\infty$ のとき, f_n が f に収束することを示す. ε に対して上の p を取ると, $n \geqslant p$ と E の任意の元 x とに対して $d(f(x),\ f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ だから, $n \geqslant p$ に対して $d(f,\ f_n) \leqslant \varepsilon$ となり, $f_n \longrightarrow f$ が証明された. よって $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ は完備距離空間である. 終.

系. F がバナハ空間ならば, $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ もバナハ空間である. とくに, 集合 E 上の実数値ないし複素数値の有界関数の全体 $(\mathbf{K}^{\mathrm{E}})_b$ はバナハ空間である.

以上の結果は関数列の収束性の研究に有効である. そして, 関数列 f_n が極限関数 f に収束するということを, f_n や f をある位相空間の元と考えて, そこで点列 f_n が点 f に収束することであると考えるとよい.

関数列の単純収束

関数列 f_n, すなわちある集合 E から距離空間 F への写像の列 f_n が, $n \longrightarrow +\infty$ のとき, 関数 f に**単純収束**するとは, E の任意の元 x に対し, F の点列 $f_n(x)$ が, $n \longrightarrow +\infty$ のとき F の点 $f(x)$ に収束することである.

これはつぎの論理式で書ける：

(15.8)　$(\forall x \in \mathrm{E})(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant m) : d(f_n(x),\ f(x)) \leqslant \varepsilon.$

第1章 27 ページで見たように, 整数 m は, ε と x との両方に依存してはじめて決まる. E から F への写像の全体 F^{E} の上に適当な位相構造を入れて, この位相に関して f_n が f に収束するということが, ちょうど f_n が f に単純収束することと一致するようにすることはできないだろうか. これは実は可能であるがちょっと難かしい. この位相空間は距離づけできない. ここでは扱わないことにする.

関数列の一様収束

関数列 f_n が, $n \longrightarrow +\infty$ のとき, 関数 f に**一様収束**するとは, (15.8) の整数 m が x によらずに定められることである. すなわち, ε だけに依存して決まることである. 言換えれば,

(15.9)　$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall x \in \mathrm{E})(\forall n \geqslant m) : d(f_n(x),\ f(x)) \leqslant \varepsilon.$

さらに言換えれば,

(15.10)　$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant m) : d(f_n,\ f) \leqslant \varepsilon.$$

すなわち，$n \to +\infty$ のとき，f_n と f との距離が 0 に近づくということである．

もちろん一様収束なら単純収束である．しかし，つぎの例で見るように，逆は成立たない．一様収束性は単純収束性よりはるかに強い性質である．

例 1.　実変数実数値関数 g：

(15.11)　$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

を考える．この関数を実数 h だけ移動した関数を考える．すなわち，関数 g のグラフを，x 軸に平行に h だけ移動したもの，すなわち写像 $(x,\ y) \mapsto (x+h,\ y)$ によって移動して得られる関数である．この関数を $\tau_h g$ と書くと，この関数の x での値は，関数 g の $x-h$ での値である：

(15.12)　$$(\tau_h g)(x) = g(x-h),$$

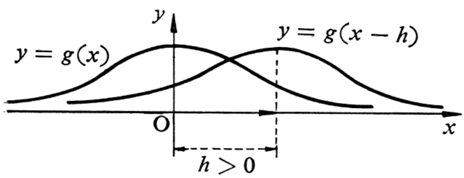
すなわち，

(15.13)　$$(\tau_h g)(x) = \frac{1}{1+(x-h)^2}.$$

移動された関数の列 $\tau_n g$ $(n \in \mathbf{N})$ を考える．容易に分るように，$n \to +\infty$ のとき，この関数列は恒等的に 0 なる関数に単純収束する．実際，x を固定すると，

(15.14)　$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} = 0$$

が成立つ．言換えると，g の $x-n$ での値の列が 0 に近づくということであり，これは明らかである．

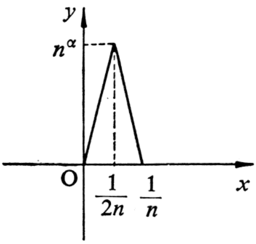


しかし，関数列 $\tau_n g$ は 0 に一様収束はしない．実際，$\tau_n g$ と 0 との距離は n に拘らずつねに 1 である．

例 2.　実変数の実数値関数 f_n $(n \geqslant 1)$ をつぎのように定める．$x \leqslant 0$ および $x \geqslant \frac{1}{n}$ のときは 0，$x = \frac{1}{2n}$ に対しては n^α $(\alpha > 0)$，さらに区間 $\left[0,\ \frac{1}{2n}\right]$ および区間 $\left[\frac{1}{2n},\ \frac{1}{n}\right]$ ではそれぞれアフィン線型であるとする*)．

---

*) 関数 $y = ax + b$ をアフィン線型関数またはアフィン関数と言う．線型という言葉は，線型空間に関する一般的定義に合わせて，関数 $y = ax$ に対してだけ使う．



この関数は左のグラフで表わされる. 一見奇妙であるが, $n \longrightarrow +\infty$ のとき, 関数列 f_n は関数 0 に単純収束する. 実際, $x > 0$ に対し, n を十分大きく取って $\dfrac{1}{n} < x$ になるようにすれば, $f_n(x) = 0$ となる. 一方 $x \leqslant 0$ ならば, つねに $f_n(x) = 0$ だから, f_n は 0 に単純収束する. しかし, f_n と 0 との距離は n^α であり, これは $n \longrightarrow +\infty$ のとき無限大に近づく. したがって, f_n は 0 に一様収束しない. この二つの例からも分るように, 単純収束の概念は普通思うほど自然なものではない. 実際, これら二つの関数列が 0 に収束すると考えるのはかなり不自然である. 関数列の収束として自然なのは, むしろ一様収束の方である.

一様収束と関数の距離との関係について上で述べたことにより, 一様収束に適する位相空間は距離空間 $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ である. E から F への有界写像の列 f_n が E から F への有界写像 f に一様収束するというのは, 距離空間 $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ の点列 f_n がこの空間の点 f に収束するということにほかならない.

一様収束性の別の表現

距離空間 F の, 集合 Λ を走る径数 λ に依存する点列 $x_n(\lambda)$ を考える. λ が Λ を走るとき, この点列が F の点 $x(\lambda)$ (これももちろん径数 λ に依存する) に, λ に関して一様に収束するとはつぎのことである:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall n \geqslant m) : d(x_n(\lambda),\ x(\lambda)) \leqslant \varepsilon.$$

これはまさに, Λ から F への関数の列 $\lambda \longmapsto x_n(\lambda)$ が, 関数 $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ に一様収束することにほかならない. だから, この概念は前の概念に帰着される. しかし, 心理的にはこの二つは同じ状況にはない. すなわち, 関数の列を考えているのか, または径数 λ に依存する点列を考えているのかの違いがある.

さて, 実数直線 $\mathbf{R}$ から距離空間 F への写像の列 f_n を考えよう. そして, つぎの文が何を意味するかを定めよう: $n \longrightarrow +\infty$ のとき, 列 f_n は, $\mathbf{R}$ のあらゆる有界区間の上で一様に, 極限関数 f に収束する. これはつぎのことを意味する: $\mathbf{R}$ の任意の有界区間 $[a,\ b]$ に対し, f_n をこの区間に制限したものの列が, f のこの区間への制限に, 一様収束する. 言換えれば,

(15.15)　$$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall b \in \mathbf{R},\ b \geqslant a)(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall x \in [a,\ b])$$
$$(\forall n \geqslant m) :\ d(f_n(x),\ f(x)) \leqslant \varepsilon.$$

ここにある数 m は x には依存しないが, ε および区間 $[a,\ b]$ に依存する. もちろん, ここでの $\mathbf{R}$ および $\mathbf{R}$ の有界区間を, それぞれ $\mathbf{R}^n$ および $\mathbf{R}^n$ の有

界集合に置換えることができる．

もっと一般に，集合 E，距離空間 F および E の部分集合の族 $(A_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，E から F への写像の列 f_n が，$n \to +\infty$ のとき，あらゆる A_i 上で一様に写像 f に収束する，という概念が得られる．公式 (15.13) の関数列 $\tau_n g$ の例を取上げてみる．この列は，$\mathbf{R}$ のあらゆる有界区間上一様に 0 に収束する．さらに，あらゆる半直線 $]-\infty, b[$ 上一様に 0 に収束する．なぜなら，$n \geqslant b$ なる n を取ると，$x \leqslant b$ なる任意の x に対して

$$\frac{1}{1+(x-n)^2} \leqslant \frac{1}{1+(b-n)^2}$$

が成立ち，この右辺は $n \to +\infty$ のとき 0 に収束する．二番目の例 (116 ページ) を取ると，関数列 f_n は，原点を中心とするあらゆる区間 $[-\delta, +\delta]$ $(\delta > 0)$ の補集合の上で一様に 0 に収束する．列 f_n は，$]0, \delta[$ の形の区間では決して一様収束しない．

最後に，E が位相空間のとき，列 f_n が E 上で**局所一様に** f に収束するとは，E の任意の点 a に対し，その近傍 $\mathscr{V}_a$ で，$\mathscr{V}_a$ 上 f_n が f に一様収束するようなものが存在することである．言換えれば，

(15.16)
$$(\forall a \in E)(\exists \mathscr{V},\ a \text{ の近傍})(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbf{N})$$
$$(\forall x \in \mathscr{V})(\forall n \geqslant m) : d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon.$$

E が局所コンパクトのときには，局所一様収束は，E の任意のコンパクト集合上での一様収束と同値である．実際，列 f_n が任意のコンパクト部分集合の上で一様に f に収束すれば，E の任意の点のコンパクト近傍で，その上で f_n が f に一様収束するものがある．すなわち局所一様収束である．逆に f_n が f に局所一様収束するとする．K を E のコンパクト集合とする．K の任意の点 a に対し，a の近傍 $\mathscr{V}_a$ で，$\mathscr{V}_a$ 上 f_n が f に一様収束するものがある．K は有限個の $\mathscr{V}_a$ で覆われるから，f_n は K 上一様に f に収束する．

さらに，いままで述べてきた，関数の列の単純収束ないし一様収束に関することがらは，47 ページの意味での関数の集合の収束の場合に拡張される．たとえば，任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して，E から距離空間 F への写像 f_t が与えられているとする．たとえば，t が真に正の値を取って 0 に近づくとき，または $+\infty$ に近づくとき，等々の場合に，f_t が f に単純収束ないし一様収束する，という概念が意味を持つ．

E，F の構造がともに関係する場合

いままでは，F の代数的ないし位相的構造だけから出発して関数空間を導入した．しかし，E，F が同時にそのような構造を持つときには，新しい関数空間

が定義される．たとえば E, F がともに体 K 上の線型空間の場合， E から F への線型写像全体の空間を考えることができる．これは E から F への写像全体の空間 F^E の部分線型空間である． もし E, F がともに位相空間ならば, E から F への連続写像全体の空間 $(F^E)_c$ を考えることができる．とくに F が距離空間のとき，この空間は必ずしも $(F^E)_b$ の部分空間ではない． なぜなら連続写像は必ずしも有界ではないから．そのかわり，その両方の部分空間として, E から F への有界連続写像の全体 $(F^E)_{bc}$ を考えることができる．最後に, E, F がともにノルム線型空間であるとすると，定理 59 のように， E から F への連続線型写像の全体 $\mathscr{L}(E;F)$ を考えることができる． これは $(F^E)_{bc}$ の部分空間ではない．なぜなら，線型写像は，恒等的に零でないかぎり有界でないから[*]．だが，E の単位球を E_0 とするとき，E から F への線型写像は，その E_0 での値によって決まる． 実際，倍写像の公式 $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$ によればよい．さらに，E_0 から F への写像が，E から F への線型写像の E_0 への制限になっているかどうかはすぐ分る． そのためには， $\|\vec{x}\| > 1$ なる $\vec{x}$ に対して，$u(\vec{x}) = \|\vec{x}\| u\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$ と置いて u を E に延長し， この写像が線型かどうかを調べればよい． 定理 58 により， E から F への線型写像 u が連続なのは，単位球 E_0 の u による像が F で有界なときである． だから，E から F への線型写像全体の空間は， E_0 から F への写像全体の空間のある部分空間， すなわち E から F への線型写像の E_0 への制限になっているような写像全体の空間と同一視される． また，E から F への連続線型写像全体の空間 $\mathscr{L}(E;F)$ は, E_0 から F への有界写像全体の空間 $(F^{E_0})_b$ のある部分空間と同一視される．そして，E から F への連続線型写像のノルムの定義と，E_0 から F への有界写像のノルムの定義とを比べることにより， $\mathscr{L}(E;F)$ がノルム空間 $(F^{E_0})_b$ のノルム部分空間とまったく同一視されることが分る．

さらに，簡単に，$\mathscr{L}(E;F)$ が $(F^{E_0})_b$ の閉部分空間と同一視されたこともわかる． F が完備なら $(F^{E_0})_b$ も完備 (定理 76) だから， その閉部分空間として, $\mathscr{L}(E;F)$ も完備である (定理 52)． こうして定理 61 が再現された．

連続関数列の局所一様極限の連続性

定理 77.　E, F を距離空間, $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ を E から F への写像の列で，f に局所一様収束するものとする． f_n がすべて E の点 a で連続なら，極限 f も a で連続である． f_n がすべていたるとこ

---

[*] 実際， $u(\vec{a}) \neq \vec{0}$ なる $\vec{a} \in E$ があると， $n \to +\infty$ のとき，$\|nu(\vec{a})\| = n\|u(\vec{a})\|$ だから，列 $u(n\vec{a}) = nu(\vec{a})$ は有界でない．

ろ連続なら f も連続である．もし，(f_n) が E 上一様収束し，各 f_n がすべて E 上一様連続ならば，f も E 上一様連続である．

証明．　$\mathscr{V}_a$ を a の近傍で，その上で (f_n) が一様収束するものとする．一様収束の定義により，与えられた ε に対し，ある整数 m を取ると，$\mathscr{V}_a$ 内の任意の x に対して，不等式

$$d(f_m(x),\ f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{15.17}$$

が成立つ．関数 f_m は点 a で連続だから，a の近傍 $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_a$ を選ぶと，$\mathscr{V}$ 内の任意の x に対して

$$d(f_m(x),\ f_m(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{15.18}$$

が成立つ．したがって，$\mathscr{V}$ 内の x に対して，

$$\begin{aligned} d(f(x),\ f(a)) \leqslant d(f(x),\ f_m(x)) &+ d(f_m(x),\ f_m(a)) \\ &+ d(f_m(a),\ f(a)) \leqslant \varepsilon \end{aligned} \tag{15.19}$$

が成立ち，f は a で連続である．f_n がすべていたるところ連続ならば，当然 f もいたるところ連続となる*)．

つぎに f_n がすべて一様連続で，E 上 f に一様収束するとする．与えられた ε に対し，ある整数 m を選ぶと，E のすべての x に対して (15.17) が成立つ．f_m は一様連続だから，ある数 $\eta > 0$ を選ぶと，$d(x',\ x'') \leqslant \eta$ なる E の二点 $x',\ x''$ に対して $d(f_m(x'),\ f_m(x'')) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ が成立つ．すると，$d(x',\ x'') \leqslant \eta$ に対し，

$$\begin{aligned} d(f(x'),\ f(x'')) \leqslant d(f(x'),\ f_m(x')) &+ d(f_m(x'),\ f_m(x'')) \\ &+ d(f_m(x''),\ f(x'')) \leqslant \varepsilon \end{aligned} \tag{15.20}$$

が成立ち，f は一様連続である．　終．

注意．　これとは反対に，連続関数列 f_n は不連続関数にいとも自然に単純収束する．$0 \leqslant x \leqslant 1$ で $f_n(x) = x^n$ と置くと f_n はすべて連続であり，$n \to +\infty$ のとき，$0 \leqslant x < 1$ に対しては $f(x) = 0$，$x = 1$ に対しては $f(1) = 1$ とした不連続関数 f に単純収束する．

系 1.　E から F への有界写像全部の集合 $(\mathrm{F}^\mathrm{E})_b$ に (15.3) で定まる距離を入れた距離空間の中で，E から F への有界連続写像の全体 $(\mathrm{F}^\mathrm{E})_{bc}$ は閉集合である．

これは定理を別の言葉で言換えたものにすぎない．

系 2.　F が完備ならば，E から F への有界連続写像全部の集合に (15.3) で定まる距離を入れた距離空間 $(\mathrm{F}^\mathrm{E})_{bc}$ は完備距離空間である．

実際，それは完備距離空間 $(\mathrm{F}^\mathrm{E})_b$ (定理 76 による) の閉集合だから，定理 52 を

---

*)　この二つの結果を得るためには，E は距離空間である必要はなく，位相空間であればよい．

適用すればよい.

系 3. F がバナハ空間ならば, E から F への有界連続写像全体の集合に (15.6) で定まる距離を入れた空間 $(F^E)_{bc}$ はバナハ空間である.

E が係数体 **K** 自身の場合がとくに重要である. すなわち, 距離空間 E 上の実数値ないし複素数値の有界連続関数の全体はバナハ空間である.

とくに実変数の, 実数値ないし複素数値の有界連続関数の全体はバナハ空間である.

E がコンパクトならば (応用上の多くの場合, それは実数直線の有界閉区間), 定理 31 により, E 上のベクトル値連続関数はすべて有界である*). だから, コンパクト空間 E から バナハ空間 F への連続関数の全体に, (15.6) によるノルムを入れた空間 $(F^E)_c$ はバナハ空間である.

応用. いくつかの反例.

ここで, 前節に予告した反例を作る準備ができた.

1° **R** の有界閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ 上の実数値ないし複素数値の連続関数全体の線型空間 (無限次元) を $\mathscr{C}([a, b])$ と書く**). この空間の上に, たがいに同値でないノルムがどうやって作られるかを示そう. これは定理 13 のあとで予告しておいたものである. 第一のノルムは (15.6) によってすでに定義されているものである.

第二のノルムは積分を使ってつぎの式で定義する:

(15.21) $$N(f) = \int_a^b |f(x)|\,dx \ ^{***)}.$$

<u>この二つのノルムはたがいに同値でない.</u> つぎの優評価

(15.22) $$N(f) \leqslant (b-a)|||f|||$$

は成立つ. しかし, $|||f||| \leqslant kN(f)$ の形の優評価は明らかに存在しない. ただし, k は f によらない定数である. 実際, $[a, b] = [0, 1]$ とし, 116 ページの例 2 の関数列 (f_n) を考える. これらの関数に対し,

---

*) 定理 31 では実数値関数だけを扱ったが, $\vec{f}$ がベクトル値関数のときも, ノルム $\|\vec{f}\|$ は実数値連続関数となるから有界である.

) $\mathscr{C}([a, b])$ は $(\mathbf{K}^{[a, b]})_c$ とも書ける. **K は実数体ないし複素数体である.

***) これはたしかに正数 $(\geqslant 0)$ である. 三角不等式および関数 $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ は明らかである. $f \neq 0$ ならば, すなわち f が恒等的に 0 でないならば, $[a, b]$ の点 c で $f(c) \neq 0$ なるものがある. f の連続性により, c を含むある区間上で $|f(x)| > 0$ となるから, $N(f) > 0$ である.

$$\text{(15.23)}\qquad |||f_n||| = n^{\alpha},\quad \mathrm{N}(f_n) = \frac{1}{2}n^{\alpha-1},\quad \frac{|||f_n|||}{\mathrm{N}(f_n)} = 2n$$

となるから，$|||f||| \leqslant k\mathrm{N}(f)$ とはなりえない．$0<\alpha<1$ ならば，$n \to +\infty$ のとき，f_n は，第二のノルム N に対しては $+\infty$ に近づくが，第一のノルム $|||\ \ |||$ に対してはそうはならない．線型空間 $\mathscr{C}([a,\ b])$ 上に，たがいに同値でないノルムが無限にたくさん存在することも簡単に分る．

2° ノルム $|||\ \ |||$ を備えた空間 $\mathscr{C}([0,\ 1])$ では，単位球はコンパクトでない．

証明． $f_n(x)=x^n$ なる関数列 f_n を考える（120 ページの注意参照）．

$$\text{(15.24)}\qquad f_n(x)=x^n,\quad |||f_n|||=1\qquad (n \geqslant 1).$$

この関数列は，$f(1)=1$，$f(x)=0$ $(0 \leqslant x<1)$ という関数 f に単純収束する．だから，もしこの列の部分列で一様収束するものがあったとすれば，その極限はこの関数 f 以外ではありえない．ところが f は不連続だから，こういうことは起りえない．したがって，$\mathscr{C}([0,\ 1])$ の単位球に属する関数の列で，そのいかなる部分列も収束しないものが得られた．だから，ヴァイエルシュトラス=ボルツァノの定理（定理 27）によって単位球はコンパクトでない．かくして，$\mathscr{C}([0,\ 1])$ は局所コンパクトでない．すでに見たように（定理 55），これはすべての無限次元ノルム空間について言えることである．

定理 78. E，F を距離空間，A を E の部分集合，f_0，f_1，f_2，…，f_n，… を A から F への写像の列で，f に一様収束するものとする．E の点 a が A の接触点であるとする*)．もし，各 n について，x が A 内の値を取って a に近づくときの $f_n(x)$ の極限が存在し，しかも F が完備ならば，$f(x)$ も，x が A 内の値を取って a に近づくときの極限を持つ．しかも，

$$\text{(15.25)}\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{A}}} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{A}}} f_n(x)\right)$$

が成立つ．

証明． 各 n に対し，$\mathrm{A}\cup\{a\}$ 上の関数 $\tilde{f}_n$ を，$x \neq a$ に対しては $\tilde{f}_n(x)=f_n(x)$，$\tilde{f}_n(a)=\lim\limits_{\substack{x\in \mathrm{A}\\ x\to a}} f_n(x)$ によって定める．定義によって $\tilde{f}_n$ は点 a で連続である．一方，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある整数 p を取ると，$m \geqslant p$，$n \geqslant p$ なる m，n に対して $d(f_m(x),\ f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ および $d(f(x),\ f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ が，$x \in \mathrm{A}$，$x \neq a$ なるすべての x について成立つ．$x \mapsto a$ として，$d(\tilde{f}_m(a),\ \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$ が得られる．よって $\tilde{f}_n(a)$ は F のコーシー列である．F は完備と仮定したから，この列は極限を持つ．それを $\tilde{f}(a)$ とす

---

*) a が A に属するかどうかについては何も仮定しない．

る. $x \in \mathrm{A}$, $x \neq a$ に対しては $f(x) = \tilde{f}(x)$ と置いて, $\mathrm{A} \cup \{a\}$ から F への関数 $\tilde{f}$ が得られる. $n \to +\infty$ のとき, $x \neq a$ については $f_n(x)$ は $f(x)$ に収束し, 一方 $\tilde{f}(a)$ の定義から, $\tilde{f}_n(a)$ は $\tilde{f}(a)$ に収束する. すなわち, $\tilde{f}_n$ は $\tilde{f}$ に単純収束する. これは実は一様収束である. なぜなら, $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ に対し, $x \neq a$ ならば $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}_n(x)) = d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ が成立ち, 一方, $d(\tilde{f}_m(a), \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$ だから, $m \to +\infty$ として $d(\tilde{f}(a), \tilde{f}_n(a)) \leqslant \varepsilon$ となり, 結局, $d(\tilde{f}, \tilde{f}_n) \leqslant \varepsilon$ となる.

$\tilde{f}_n$ はすべて a で連続だから, 定理 77 により, $\tilde{f}$ も a で連続である. すなわち, x が A 内から a に近づくとき, $f(x)$ は極限を持ち, それは $\tilde{f}(a) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(a) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{A}}} f_n(x)\Bigr)$ である. 終.

例. f_n, f がすべて実数直線 $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数であり, $n \to +\infty$ のとき f_n は f に一様収束し, 各 n について $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n$ が存在するとする. このとき, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ も存在し, l_n は l に収束する.

ノルム線型空間に値を取る関数の級数

$\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\cdots$, $\vec{u}_n$, $\cdots$ を, 集合 E からノルム空間 F への写像の列とする. これに対して, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ を考えることができる. E の各点 x に対し, F のベクトルの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(x)$ がノルム空間 F 内で収束して和 $\vec{\mathrm{S}}(x)$ を持つとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ は**単純収束**すると言い, 写像 $\vec{\mathrm{S}} : x \mapsto \vec{\mathrm{S}}(x)$ をその**和**と言う. 言換えれば, 部分和 $\vec{\mathrm{S}}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n$ を項とする E から F への関数の列が関数 $\vec{\mathrm{S}}$ に単純収束することである. 部分和 $\vec{\mathrm{S}}_n$ の列が一様収束するとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ は**一様収束**すると言う.

一方, F がバナハ空間であるとき, 絶対収束およびノルム収束の概念に関して若干のあいまいさがある. バナハ空間のベクトルの級数に関して, 《絶対収束》と《ノルム収束》とを我々は同じ意味に使った. 関数の級数についてはこの二つを区別する.

E の各点 x に対して, バナハ空間 F のベクトルのノルムの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{u}_n(x)\|$ が収束するとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n$ は**単純絶対収束**すると言う. 言換えれば, E 上の正実数値関数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{u}_n\|$ *) が単純収束することである. ノルム空間 $(\mathrm{F}^{\mathrm{E}})_b$ の元の

---

*) $\|\vec{r}_n\|$ は関数 $x \mapsto \|\vec{u}_n(x)\|$ を表わし, $|||\vec{u}_n|||$ は $\sup_{x\in \mathrm{E}} \|\vec{u}_n(x)\|$ であった.

ノルムの作る正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|||\vec{u}_n|||$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ は**ノルム収束**すると言う．この方が明らかに強い概念である：ノルム収束なら単純絶対収束であるが，逆は成立たない．どちらの場合も，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ は単純収束する（F は完備と仮定してある）．さらに，ノルム収束ならば一様収束する．ノルム収束は，ベクトル値関数の級数の一様収束性を判定するもっとも重要な基準である．

ノルム収束の，したがって一様収束の判定基準はつぎのように表わされることが多い．

E からバナハ空間への関数の級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ に対し，実数 $a_n \geqslant 0$ の列で，E のすべての元 x に対して $\|\vec{u}_n(x)\| \leqslant a_n$ が成立ち，しかも $\sum_{n=0}^{\infty}a_n < +\infty$ となるものが存在すれば，もとの級数はノルム収束し，したがって一様収束する．

一様半収束性の判定基準もあると都合がよい．一般に，関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n$ が一様収束することを示すためには，まずEの各点 x に対して級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\vec{u}_n(x)$ が収束することを示し，つぎに残項 $\vec{R}_m = \vec{u}_{m+1} + \vec{u}_{m+2} + \cdots$ を作り，関数列 $\vec{R}_m$ が $m \to +\infty$ のとき 0 に一様収束することを言えばよい．そのためには，残項の具合のよい優評価を見付ければよい．

例として，とくに興味のあるテイラー級数の場合を挙げよう．

定理 79.　（複素係数の）テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ が，その収束円上の正実数点 $x=\mathrm{R}$ で収束すれば，それは区間〔0, R〕で一様収束する．とくに，その和は区間〔0, R〕上連続関数である．

証明.　$a_n x^n = (a_n \mathrm{R}^n)\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$ であるから，〔0, R〔 内の点 x にアーベルの収束基準を適用することができる*)．実際，$u_n = \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$，$v_n = a_n \mathrm{R}^n$ と置き，双線型写像 B として積写像を取ると，これらはアーベルの条件を充たすから，公式 (14.34) によってつぎの優評価が得られる：

$$\mathrm{U}_{m+1}(x) = \left|\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+1} - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+2}\right| + \left|\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+2} - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+3}\right| + \cdots$$
$$= \left(\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+1}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{\mathrm{R}} + \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^2 + \cdots\right) = \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{m+1} \tag{15.26}$$

---

*) 級数が幾何級数によって押えられ，したがって絶対収束する領域で，半収束級数のための判定法を適用するのはばかばかしく思われるかもしれない．だが，我々は一様収束性を証明したいのである．$x=\mathrm{R}$ では級数が絶対収束するかどうか分らないのだから，ほかに方法はない．

$$V_{m+1}(x)=V_{m+1}=\sup_{n\geqslant m+1}|a_{m+1}R^{m+1}+\cdots+a_nR^n|.$$

(15.27) $$R_{m+1}(x)\leqslant\left(\frac{x}{R}\right)^{m+1}\sup_{n\geqslant m+1}|a_{m+1}R^{m+1}+\cdots+a_nR^n|.$$

$x=R$ に対してはアーベルの基準は適用できない．実際，そこでは $\left(\frac{x}{R}\right)^n=1$ で定値だから有界変分であるが 0 には収束しない． しかし， とにかく級数は収束するのだから，残項の定義自身によって， その優評価式は成立つ． したがって， この優評価は区間 〔0, R〕 のすべての x に対して成立つ．ここで $m\to+\infty$ とすると，V_{m+1} は 0 に近づき（収束する実数級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ に対するコーシーの基準による），しかも $U_{m+1}\leqslant 1$ である．よって， $m\to+\infty$ のとき，残項 R_{m+1} は 0 に一様収束し，テイラー級数の一様収束性が証明された．

級数の和の連続性は定理 77 から出る． 終．

この定理には重要な応用がある．たとえば，つぎのテイラー展開を考えよう．

(15.28) $$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\qquad(|x|<1).$$

$x=1$ でも，交項級数の収束基準によって級数は収束する．したがって，この級数は区間 〔0, 1〕 で連続関数を表わし，その和は $x=1$ において，

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\log(1+x)=\log 2$$

を与える．したがってつぎの公式が得られる：

(15.29) $$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots^{*)}.$$

同様に，関数 Arc tan x のテイラー展開

(15.30) $$\operatorname{Arc\,tan}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

を考え，$x=1$ に対して上と同じことをすれば，公式

(15.31) $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

が得られる．

§ 16. 実数．複素数．実数値関数．複素数値関数の無限積

定義． u_0, u_1, u_2, …, u_n, … を実数列または複素数列とする． 部分

---

*) この場合には交項級数の収束基準を直接適用することもできる． 区間 〔0, 1〕 のあらゆる x に対して基準が適用され，残項 $R_{m+1}(x)$ の絶対値は無視した最初の項 $\frac{x^{m+1}}{m+1}\leqslant\frac{1}{m+1}$ で押えられる．よって残項は 0 に一様収束する．

積（はじめの有限項の積）$\Pi_n = \prod_{0 \leqslant m \leqslant n} u_m$ を項とする数列が，$n \to +\infty$ のときにある有限の数 $\neq 0$ に収束するとき，**無限積** $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が**収束する**と言う．

その他の場合には無限積は**発散**すると言う．部分積 Π_n の列が 0 に収束するときにも無限積が発散すると言うのはおかしいと思うかもしれないが，おいおいそれが正当だという理由が分るだろう．

u_n のうちの一つでも 0 ならば，無限積は発散するわけである．u_n がすべて実数で $\geqslant 1$ ならば，Π_n は増大数列だから，有限または $+\infty$ の極限を持つ．$+\infty$ に近づくときには無限積は発散である．このとき，$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ と書く．同様に，Π_n が 0 に収束するとき，無限積は発散ではあるが，$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ と書く．

定理 80.　無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が収束すれば，一般項 u_n は，$n \to +\infty$ のとき 1 に近づく．

証明.　無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が収束すれば，その値 Π は 0 でなく，Π_n も Π_{n-1} もともに同じ極限 Π に近づく．したがって商 $u_n = \dfrac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}$ （Π_{n-1} は 0 でない）は $\dfrac{\Pi}{\Pi} = 1$ に近づく．　終．

この定理は部分積 Π_n が 0 に収束する場合には成立たない．たとえば，無限積 $(1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\right)\cdots$ の部分積は明らかに 0 に収束するが，一般項 $\frac{1}{n}$ は 1 に収束しない．

注意.　無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が収束するとき，　無限積 $\prod_{n \geqslant m+1} u_n$ の値 R_m を**残項**と言う．$m \to +\infty$ のとき，R_m は 1 に近づく．

無限積が収束するためには，それがコーシーの基準を充たすことが必要十分である．すなわち，m，n がともに $+\infty$ に近づくとき（u_n はどれも 0 でないと仮定する）$\dfrac{\Pi_n}{\Pi_m}$ が 1 に近づくことである．

証明.　まず，収束積がこの基準を充たすことは明らかである．逆に，無限積がコーシーの基準を充たすとする．ある整数 p を取ると，$n \geqslant p$ ならば $|\Pi_p - \Pi_n| \leqslant |\Pi_p|$ が成立つ．よって $|\Pi_n|$ は有界である．その上限を M とする．与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，

$\varepsilon \leqslant \dfrac{M}{2}$ とすると，ある整数 q を取ると，$m \geqslant q, n \geqslant q$ なる m, n に対して $|\Pi_m - \Pi_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}|\Pi_m| \leqslant \varepsilon$ が成立つ．よって，Π_n は複素数体 $\mathbf{C}$ の中のコーシー列である．$\mathbf{C}$ は完備だからそれは極限 Π を持つ．上の不等式で $n \to +\infty$ とすれば，$|\Pi_m - \Pi| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}|\Pi_m| \leqslant \dfrac{1}{2}|\Pi_m|$ となり，$\Pi \neq 0$ である．すなわち無限積は収束する．　終．

無限積およびその対数級数

無限積の収束・発散を調べるのに，各項の対数を取りたくなるのは自然である．そうすれば無限積は級数に置換えられる．そして，実数の無限積を考えるとき，$u_n > 0$ ならばこれが可能となる．ところで，十分先の n についても $u_n > 0$ とならないとすると，$n \to +\infty$ のとき，u_n は 1 に近づかず，したがって無限積は発散し，調査は終る．反対に，もし $n \to +\infty$ のとき u_n が 1 に近づくならば，ある番号より先の u_n はすべて真に正である．

つぎに u_n が複素数である場合を考えよう．よく知られているように，複素数の対数を取るのはかなり微妙で難かしい．実際，複素数には無限に多くの対数がある．$z = re^{i\theta}$ に対して，一般に $\log z = \log r + i\theta$ であるが，この θ は 2π の整数倍を加えることを除いてしか決らない．しかし，z が右半平面 $x = \mathscr{R}z > 0$ の中だけを動くときには，その偏角を $-\dfrac{\pi}{2}$ と $\dfrac{\pi}{2}$ との間に取ることによって，z の対数が決る．こうして決めた対数は連続関数である．これを対数の**主値**と言い，Log と書く*⁾．

とくに複素数 v が $|v| < 1$ を充たせば，$1 + v$ は右半平面にあって，いま定めた対数の主値はつぎのテイラー展開によって表わされる：

$$\text{(16.1)}\qquad \mathrm{Log}(1+v) = \frac{v}{1} - \frac{v^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{v^n}{n} + \cdots.$$

さて，$\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ を複素数の無限積とする．$n \to +\infty$ のときに u_n が 1 に近づかなければ，無限積は発散し，調査は終る．$n \to +\infty$ のときに u_n が 1 に近づくならば，十分先の n については u_n は右半平面 $\mathscr{R}z > 0$ に属し，したがって，はじめの有限項を除外して，対数を取ることができる．そしてつぎの定理が成立つ．

定理 81.　すべての u_n が $\mathscr{R}u_n > 0$ を充たすとき，無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が収束

---

*⁾ 右半平面よりもっと広く，複素平面内から，左実数半直線（$z \in \mathbf{R}$, $z \leqslant 0$）を除いた領域でも主値が定まる．このとき，$-\pi < \mathrm{Arg}\, z < +\pi$ に取れば，$-\pi < \mathscr{I}m(\mathrm{Log}\, z) < \pi$ となって主値が定まる．

するためには，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Log}\ u_n$ が収束することが必要十分である．

証明. まず無限積が収束するとする．部分積を Π_n で表わし，対数の級数の部分和を S_n で表わす．必ずしも $\mathrm{Log}\ \Pi_n = S_n$ とはならないし，第一，$\mathscr{R}\Pi_n > 0$ となるかどうかも分らない．しかし，コーシーの基準によれば，ある整数 p を取ると，$n \geqslant p$ に対して $\left|\frac{\Pi_n}{\Pi_p} - 1\right| < 1$ が，したがって $\mathscr{R}\frac{\Pi_n}{\Pi_p} > 0$ が成立つ．同様に $\mathscr{R}\frac{\Pi}{\Pi_p} > 0$ も成立つ．このような p を固定する．$\mathrm{Log}\frac{\Pi_n}{\Pi_p} = S_n - S_p + 2k_n i\pi$ と書ける．$\frac{\Pi_n}{\Pi_p}$ は $\frac{\Pi}{\Pi_p}$ に収束するから，対数の主値の連続性により，$n \to +\infty$ のとき，$S_n - S_p + 2k_n i\pi$ は極限を持つ．よって $\mathrm{Log}\ u_n + 2(k_n - k_{n-1})i\pi$ を一般項とする級数は収束する．するとその一般項は 0 に近づかなければならないが，u_n は 1 に近づくのだから $\mathrm{Log}\ u_n$ は 0 に近づき，したがって，あるところから先の n については $k_{n-1} = k_n$ でなければならない．よって $\mathrm{Log}\, u_n$ を一般項とする級数は収束する．

逆に対数の級数が収束するとする．数列 S_n はある数 S に収束する．指数関数の連続性により，数列 $\Pi_n = e^{S_n}$ は数 $\Pi = e^S \neq 0$ に近づく． 終．

この証明を見れば，$\Pi \neq 0$ としなければならない訳が分るだろう． それに，もし u_n がすべて実数で > 0 としても，もし Π_n が 0 に近づけば，$\mathrm{Log}\, u_n$を一般項とする級数は発散し，その和は $-\infty$ になる．

すでに収束することの分っている無限積について，その対数の級数（あるところから先だけ）が絶対収束〖半収束〗するとき，もとの無限積が**絶対収束**〖**半収束**〗すると言う．もちろん，この言いかたには奇妙なところがある．無限積が絶対収束するというのは，無限積 $\prod |u_n|$ が収束するということでは全然ない（収束しさえすればこうなっている．しかも $\prod_{n=0}^{\infty} |u_n| = \left|\prod_{n=0}^{\infty} u_n\right|$）． もし u_n がすべて実数で $\geqslant 1$ であれば，あるいは 0 と 1 との間にあれば，収束と絶対収束とは同じことになる．

定理 82. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + v_n)$ $(v_n \neq -1)$*) が絶対収束するためには，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ が収束することが必要十分である．

証明. まず無限積が絶対収束するとすると，それは収束するのだから，$1 + v_n$ は 1 に近づき，したがって十分大きい $n \geqslant p$ に対しては $\mathrm{Log}(1 + v_n)$ が取れる．そして，級数 $\sum_{n \geqslant p} |\mathrm{Log}(1 + v_n)|$ は収束する．ところが，正項級数の収束性に関しては，一般項を，さらに高位の無限小($n \to +\infty$ のときの)だけ異なるもので置換えても差支えない．$n \to +\infty$

*) 仮定 $v_n \neq -1$ を置かないと，$\sum |v_n| < \infty$ でありながら，無限積が 0 の項を含み，したがって発散してしまうことが起る．

のとき $v_n \to 0$，したがって $\mathrm{Log}(1+v_n) \sim v_n$ となり，級数 $\sum_{n \geqslant p} |v_n|$ は収束する．したがって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ も収束する．

逆に，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ が収束するとする．v_n は 0 に近づくから，十分大きな $n \geqslant p$ に対して $\mathscr{R}(1+v_n) > 0$ となり，対数を取ることができる．n が $+\infty$ に近づくとき，$|\mathrm{Log}(1+v_n)| \sim |v_n|$ であるから，級数 $\sum_{n \geqslant p} |\mathrm{Log}(1+v_n)|$ は収束する．よって級数 $\sum_{n \geqslant p} \mathrm{Log}\,(1+v_n)$ も収束する．定理 81 によって無限積 $\prod_{n \geqslant p} (1+v_n)$ は収束する．v_n はどれも -1 ではないから $\prod_{n=0}^{\infty} (1+v_n)$ は 0 の項を持たず，したがって収束する．無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} (1+v_n)$ が収束し，級数 $\sum_{n \geqslant p} |\mathrm{Log}(1+v_n)|$ も収束するのだから，無限積は絶対収束する．　終．

例．　無限積

(16.2)
$$\prod_{n \geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad \text{および} \quad \prod_{n \geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

は，$\alpha > 1$ ならば収束し，$\alpha \leqslant 1$ ならば発散する．とくに $\alpha = 1$ でも発散する．この場合には直接にも確かめられる．実際，部分積がそれぞれ

(16.3)
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

であるから．すると，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ないし $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ の発散性は，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ の発散性よりもっと明らかなことである．だから，定理 82 を逆に使って級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ の発散性を証明することができる．

実数値ないし複素数値関数の無限積

$u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$ を集合 E 上の実数値ないし複素数値関数の列とする．無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が**単純収束**するとは，E のあらゆる点 x に対して実数ないし複素数の無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ が収束することである．言換えれば，関数列 $\Pi_n = \prod_{0 < m < n} u_m$ が，決して 0 にならないある関数に単純収束することである．

E のすべての点 x に対して数の無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ が絶対収束するとき，関数の無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ は**単純絶対収束**すると言う．

無限積の《一様収束》という概念ははっきりしない．E 上の複素数値関数の無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ が関数 Π に一様収束するということを，関数 u_n, Π が決して 0 にならず，しかも関数列 Π_n が Π に一様収束する，と定義することもできるし，または関数 u_n, Π が決して 0 にならず，しかも関数列 $\dfrac{\Pi_n}{\Pi}$ が 1 に一様収束する，と定義することもできる．しかも，この二つは，すぐ分るように同じ概念ではない．しかし，極限関数 Π_n がつぎの E 上一様な優評価および劣評価を持つ場合には二つの概念は一致する：

$$0 < a \leqslant \Pi(x) \leqslant b < +\infty.$$

実際，この場合，不等式 $|\Pi_n - \Pi| \leqslant \varepsilon$ から不等式 $\left|\dfrac{\Pi_n}{\Pi} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{a}$ が導かれ，不等式 $\left|\dfrac{\Pi_n}{\Pi} - 1\right| \leqslant \varepsilon$ から不等式 $|\Pi_n - \Pi| \leqslant \varepsilon b$ が導かれる．我々は，こういう場合にだけ，関数の無限積の**一様収束**という言葉を使うことにする．

しかし，位相空間 E 上の連続関数の無限積については，その**局所一様収束**の概念が定義される（このとき，極限関数も連続になる）．実際，関数列 Π_n が関数 Π に局所一様収束するとすると，定理 77 によって Π は連続であり，それは決して 0 にならないのだから，E の各点 a に対し，そのある近傍 $\mathscr{V}'_a$ を取ると，その上で $|\Pi|$ は上下から真に正の有限の定数によって押えられる．そこで，a の近傍 $\mathscr{V}_a$ を $\mathscr{V}'_a$ に含まれるように取り，しかも $\mathscr{V}_a$ の上で Π_n が Π に一様収束するように取ると，$\mathscr{V}_a$ の上で $\dfrac{\Pi_n}{\Pi}$ は 1 に一様収束する．

逆に，$\dfrac{\Pi_n}{\Pi}$ が 1 に局所一様収束するとすると，E の各点 a に対し，a のある近傍 $\mathscr{V}'_a$ とある n を選んで，$x \in \mathscr{V}'_a$ に対して $\left|\dfrac{\Pi_n(x)}{\Pi(x)} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ が成立つようにできる．すると，$\dfrac{1}{2} \leqslant \left|\dfrac{\Pi_n(x)}{\Pi(x)}\right| \leqslant \dfrac{3}{2}$ が成立ち，$\dfrac{2}{3}|\Pi_n(x)| \leqslant |\Pi(x)| \leqslant 2|\Pi_n(x)|$ が成立つ．Π_n は連続で $\Pi_n(a) \neq 0$ だから，a の近傍 $\mathscr{V}''_a \subset \mathscr{V}'_a$ を適当に取ると，その上で $|\Pi_n|$ は上下から真に正の有限な定数によって押えられる．したがって $|\Pi|$ も $\mathscr{V}''_a$ 上，上下から真に正の有限な定数によって押えられる．a の近傍 $\mathscr{V}_a \subset \mathscr{V}''_a$ を，その上で $\dfrac{\Pi_n}{\Pi}$ が 1 に一様収束するように取ると，そこで Π_n は Π に一様収束する．

リーマンのゼータ関数への応用

リーマンのゼータ関数はつぎの式で定義される：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{16.4}$$

$s = \sigma + i\tau$ と置く．$\delta > 0$ に対し，$\sigma \geqslant 1 + \delta$ なる領域での関数項級数と考え

ると，これはノルム収束する．実際，

$$\left|\frac{1}{n^{\sigma+i\tau}}\right| = \frac{1}{n^{\sigma}} \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}} \tag{16.5}$$

となるからよい．

各 n に対し，関数 $s \longmapsto \dfrac{1}{n^s}$ は右半平面 $\sigma \geqslant 1+\delta$ で連続だから，その和すなわち関数 ζ もこの右半平面で連続である．任意の $\delta > 0$ に対してこうなるのだから，関数 ζ は右半平面 $\sigma > 1$ で連続である．

さて，つぎの無限積を考える．p は素数全部の集合を走るとして，

$$G(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\right). \tag{16.6}$$

この無限積の項はどれも決して 0 にならない．また，分母 $1-\dfrac{1}{p^s}$ も $\sigma > 0$ に対しては決して 0 にならない．しかも，$\sigma > 0$ ならば $\left|\dfrac{1}{p^s}\right| = \dfrac{1}{p^{\sigma}} < 1$ だから，定理 82 が適用できる．

無限積が絶対収束するのは，その逆数から成る無限積 $\prod_p \left(1-\dfrac{1}{p^s}\right)$ が絶対収束する場合であり，それは定理 82 によって級数 $\sum_p \dfrac{1}{p^{\sigma}}$ が収束する場合である．この級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\sigma}}$ で押えられるから，$\sigma > 1$ なら確かに収束する．

以後は $\sigma > 1$ のときだけ考える．

定理 83.　$\sigma > 1$ ならば $G(s) = \zeta(s)$ が成立つ．

証明.　s は固定して考える．与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，つぎの二性質を持つ整数 m が存在する（$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\sigma}}$ および無限積 G の収束性による）：

a）残項 $\sum_{n>m} \dfrac{1}{n^{\sigma}}$ は $\dfrac{\varepsilon}{2}$ で押えられる．

b）無限積 G の最初の m 項の部分積を $G_m(s)$ とすると，$|G_m(s) - G(s)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

さて，任意の素数 p に対し，絶対収束する等比級数への展開

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} \tag{16.7}$$

がある．絶対収束級数の何個かの積に関する規則（定理 73）により，

$$G_m(s) = \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_m} \left(\frac{1}{p_1}\right)^{k_1 s} \cdots \left(\frac{1}{p_m}\right)^{k_m s} \tag{16.8}$$

と書くことができる．ただし，$p_1 = 2$，$p_2 = 3$，$p_3 = 5$，一般に p_m は m 番目の素数，k_1，k_2，…，k_m は整数 $\geqslant 0$ である．したがって，

(16.9)
$$G_m(s) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^s}$$

が成立つ．ここで，ν は整数で，その素因数分解に最初の m 個の素数 p_1，p_2，…，p_m 以外の素数が現われないようなもの全部を走る．

すると，$G_m(s) - \zeta(s)$ は，級数 $\sum_{n} \frac{1}{n^s}$ の項のうち，$n > m$ なる n に対する項の一部のみから成る級数であり，したがって，

(16.10)
$$|G_m(s) - \zeta(s)| \leqslant \sum_{n \geqslant m} \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．これから，不等式

(16.11)
$$|G(s) - \zeta(s)| \leqslant |G(s) - G_m(s)| + |G_m(s) - \zeta(s)| \leqslant \varepsilon$$

が得られる．ε は任意だから $G(s) = \zeta(s)$ となる．　終．

系．　$\sigma > 1$ で，関数 ζ は決して 0 にならない．

実際，その値は収束無限積の値であるから 0 にならない．

これらの結果はもちろん $\sigma = 1$ では成立たない．とくに級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することはよく知られている．さらに，つぎの定理が証明される．

定理 84.　無限積 $\prod_{p} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$ は発散する．

証明．　任意の $A > 0$ に対し，整数 m を選んで，

(16.12)
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \geqslant A$$

とすることができる．一方，部分積 G_m の級数展開 (16.7) はこの場合も成立つから，G_m は和 $\sum \frac{1}{\nu}$ の形で，ν は整数のうち，その素因数が p_1，p_2，…，p_m だけであるようなものすべてを走る．したがって，不等式

(16.13)
$$G_m(1) = \sum \frac{1}{\nu} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \geqslant A$$

が成立つ．A は任意だから，無限積（その項はすべて > 1）は発散し，$G(1) = +\infty$ となる．　終．

系．　素数は無限に多く存在する．さらに強く，級数 $\sum_{p} \frac{1}{p}$ は発散する．

実際，この級数の発散性は，無限積 $\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{G(1)}$ の発散性と同値である．

注意．　つぎの級数

(16.14)
$$\zeta_a(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} + \cdots$$

を考えよう．

いま示すように，この級数は $\sigma > 0$ に対して収束する．さらに強く，それは右半平面 $\sigma > 0$ 内の任意のコンパクト集合の上で一様収束する．

証明.　K をそのようなコンパクト集合とする．まず，$|s|$ は s の連続関数だから，ある数 S を取ると，$|s|$ は K 上 S で上から押えられる．同様に，σ は s の連続関数で K 上いたるところ >0 だから，ある数 $\delta > 0$ を取ると，σ は S 上 δ によって下から押えられる．

ここでアーベルの定理（定理 75）を適用する．$u_n = \dfrac{1}{n^s}$，$v_n = (-1)^{n-1}$ と置くと，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s} = u_n v_n$．$|\sigma_{m,n}|$ はすべて 1 で押えられる．数列 u_n が有界集合であることを示そう．関係式

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}\text{*)} \tag{16.15}$$

からつぎの二つの不等式が得られる：

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| \leqslant |s|\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}}, \tag{16.16}$$

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| + \left|\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{(n+2)^s}\right| + \cdots \leqslant |s|\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma n^\sigma}. \tag{16.17}$$

したがって級数は収束する．しかも，公式（14.34）により，残項の優評価

$$\left|\sum_{n \geqslant m+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right| \leqslant \frac{|s|}{\sigma(m+1)^\sigma} \tag{16.18}$$

が得られる．よって，$|R_m| \leqslant \dfrac{S}{\delta(m+1)^\delta}$ となり，この右辺は s に依存せず，$m \to +\infty$ のとき 0 に近づく．したがって級数は K 上一様収束する．　終．

$\sigma > 1$ なる s に対しては，二つの関数 ζ, ζ_a の間に簡単な関係がある．すなわち，すぐ分るように，$\zeta_a(s) = \zeta(s) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\right)^s$ が成立つから，

$$\zeta_a(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \quad \text{または} \quad \zeta(s) = \frac{\zeta_a(s)}{1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}} \tag{16.19}$$

が成立つ．

級数 ζ_a は，右半平面 $\sigma > 0$ 内の任意のコンパクト集合の上で一様収束するのだから，関数 ζ_a はそこで，したがって右半平面 $\sigma > 0$ 全体で連続である．

---

*) これはある関数値の差を上から押えるための常套手段である．すなわち，

$$f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)dt.$$

とくに，s が 1 に近づくとき，$\zeta_a(s)$ は $\zeta_a(1)=\mathrm{Log}\,2$ に近づく．すると，公式（16. 19）により，s が 1 に近づくとき，$\zeta(s)$ は（無限大の位数に関して）$\dfrac{\mathrm{Log}\,2}{1-e^{(1-s)\mathrm{Log}2}}\sim\dfrac{\mathrm{Log}\,2}{(s-1)\mathrm{Log}\,2}=\dfrac{1}{s-1}$ に同値である．事実，公式（16. 19）を使って，関数 ζ を，右半平面 $\sigma>0$ まで延長することができる*).

これとは別の方法を使うと，関数 ζ を複素平面全体に延長することができる．しかも，ζ が複素変数 s の**整型関数**（または**正則関数**）であることが証明される．すなわち，一点 $s=1$ を除く全平面で ζ は連続かつ微分可能であり，導関数は連続である．この点 $s=1$ は極で，$\zeta(1)=\infty$ である．この延長された関数は，$s=-2,\ -4,\ -6,\ \cdots$ で零になる．この関数の研究は，素数の分布の研究に役立つ．そのもっとも簡単な例を定理 84 の系で見た．

リーマンはつぎの仮説を立てたが，それは現在のところ証明されていない．すなわち，延長された関数 ζ の零点は，上に挙げた負の偶数以外は，すべて垂直な直線 $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の上にあるという仮説である．もしこの仮説が証明されると，素数の分布に関して非常に精密な知識が得られることになる．

仮説が証明されなくても，現在までに分っている関数 ζ の性質だけから，すでに多くの情報が得られている．たとえば，$n\to+\infty$ のとき，n 番目の素数は $n\,\mathrm{Log}\,n$ に同値である．また，$\mathrm{N}\to+\infty$ のとき，1 と N との間にある素数の数は $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Log}\,\mathrm{N}}$ に同値である．

素数の理論は数学の諸理論の中でもっとも面白く，かつもっとも難かしいものの一つである．

---

*) もちろん，この延長された関数は，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ の和とは何の関係もない．それは $\sigma\leqq1$ に対しては意味を持たない．

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ 行

シュヴァルツ解析学1

集合・位相

1970年9月11日　第1刷発行
1972年6月15日　第3刷発行

著　者　L. シュヴァルツ
訳　者　齋 藤 正 彦

発行所　東京図書株式会社
本　社　東京都新宿区本塩町 23（田中ビル）
振替 東京 13803 電話（357）0636〜7
営業所　東京都文京区水道 1—8—1
電 話（814）7818〜9

3341-2101-5160